This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

TRAITE'
DES LIEUX
GEOMETRIQUES.

LORS qu'aprés avoir accompli les conditions d'un Probleme, il demeure dans la derniere Equation plus d'une lettre inconnuë, le Probleme eſt un *Lieu*; & quand il ne reſte que deux lettres inconnuës, ce Lieu eſt une *Ligne*, qui ſera droite, lorſque dans l'Equation conſtitutive chaque lettre inconnuë n'aura qu'une dimenſion, & qu'elles ne ſe multiplieront point enſemble; & alors ce Lieu eſt appellé *Simple*, ou *à la Ligne droite*.

Mais, ſi l'une de ces deux lettres inconnuës a deux dimenſions, ou bien, quand leur Rectangle ſe trouve dans l'Equation conſtitutive, cette ligne locale eſt courbe, & elle eſt toûjours la circonference ou d'un *Cercle*, ou d'une *Ellipſe*, ou d'une *Parabole*, ou d'une *Hyperbole*. C'eſt ſelon la diſpoſition des deux lettres inconnuës dans l'Equation : car ſi le Quarré d'une

Digitized by Google

lettre inconnuë ſe trouve affirmé d'un côté de l'Equation, & reduit à l'unité, & que le Quarré de l'autre lettre inconnuë ſe trouve nié de l'autre côté, & pareillement reduit à l'unité, ſans que le Rectangle de ces deux mêmes lettres inconnuës ſe trouve dans l'Equation, cette ligne courbe ſera la circonference d'un *Cercle*, pour le moins lorſque les deux lettres inconnuës feront un Angle droit, & alors le Lieu ſe nomme *Plan*, ou *au Cercle*.

Lieu Plan.

Dans les autres cas cette ligne courbe peut être la circonference d'une *Ellipſe*, d'une *Parabole*, & d'une *Hyperbole*, & alors ce Lieu eſt appellé *Solide*.

Lieu Solide.

Mais, ſi dans l'Equation l'une des deux lettres inconnuës, ou toutes deux enſemble, ont trois ou quatre dimenſions, la ligne courbe qui determinera ce Lieu, qu'on appelle *Surſolide*, ſera une *Ligne du ſecond genre*. Et comme le nombre de ces lignes n'a pas encore été determiné, nous ne parlerons icy que des Lieux *Simples*, *Plans*, & *Solides*.

Lieu Surſolide.

Nous ajoûterons donc, que le Cercle ſe change en *Ellipſe*, lorſque les deux lettres inconnuës ne font pas un Angle droit, ou bien lorſque le Quarré de l'une n'eſt pas reduit à l'unité.

Lieu à l'Ellipſe.

Que ſi le Quarré de chaque lettre inconnuë ſe trouve affirmé; ou ſi au lieu du Quarré d'une lettre inconnuë il y a le Rectangle de ces deux lettres; ou bien encore ſi ce Rectangle ſe trouve ſeul égal à un autre Rectangle connu, le Lieu eſt une *Hyperbole*.

Lieu à l'Hyperbole.

Enfin; ſi ce Rectangle ne ſe trouve point dans l'Equation, & que le Quarré de l'une des lettres inconnuës s'y rencontre, le Lieu eſt une *Parabole*. Tout

Lieu à la Parabole.

Digitized by Google

cela se demontrera par ordre dans les Problemes suivans.

Mais, auparavant que de venir à la pratique, pour vous mieux faire comprendre ce que nous venons de dire, nous ajoûterons ici quelques Questions, dont la premiere vous fera connoître, qu'un Probleme est aussi un Lieu, bien que dans son Equation constitutive il ne demeure que l'une des deux lettres inconnuës, qui auront été introduites dans l'Analyse, & qui doivent toûjours faire en lignes un Angle donné, pourvû que l'autre lettre inconnuë n'ait pas été determinée, comme vous allez voir.

QUESTION I.

Trouver au dedans d'un Angle rectiligne donné, un point, duquel tirant aux deux lignes de cét Angle deux perpendiculaires, la somme de ces deux perpendiculaires soit égale à une ligne donnée. *Lieu à la ligne droite.*

ON donne l'Angle rectiligne BAC, *& il est proposé de trouver au dedans de cét Angle le point* D, *duquel tirant aux deux lignes* AB, AC, *les perpendiculaires* DB, DC, *leur somme* DB† DC, *soit égale à la ligne donnée* AE. 1. Fig.

Ayant tiré deux points E, C, *sur* AB, *les perpendiculaires* EF, CG, *& du point* D, *à la ligne* CG, *la perpendiculaire* DH, *comme si la Question étoit déja resoluë, supposez*

Digitized by Google

AE ∽ a.
EF ∽ b.
AF ∽ c.
CD ∽ x.
AC ∽ y.

Parce que l'Angle donné BAC, *est icy supposé aigu, les deux perpendiculaires* EF, CG, *tomberont au dedans du même Angle: & parce que les quatre lignes* AE, AF, CD, CH, *sont proportionnelles, aussi-bien que les quatre* AE, EF, CD, DH, *à cause des Triangles semblables* AEF, CDH, *on trouvera* CG ∽ $\frac{by}{a}$, *&* CH ∽ $\frac{cy}{a}$, *& par consequent* GH, *ou* BD ∽ $\frac{by-cx}{a}$; *Et parce que l'on veut que la somme des deux lignes* DB, DC, *soit égale à la ligne donnée* AE, *on aura cette Equation* $x+\frac{by-cx}{a} \backsim a$, *ou* $x \backsim \frac{aa-by}{a-c}$, *qui est un Lieu à la ligne droite, lequel étant resolu par* Probl. I. *donne la construction suivante.*

Construction. *Ayant fait* EI ∽ AF, *tirez du point* I, *à la ligne* AC, *la perpendiculaire* IK ∽ EF. *Tirez du point* A, *à la mesme ligne* AC, *la perpendiculaire* AM, *troisiéme proportionnelle aux deux lignes* AI, AE, *& menez par le point* M, *à la ligne* AK, *la parallele* MP, *dont la partie* OP, *comprise entre les lignes de l'Angle donné* BAC, *sera le Lieu qu'on cherche: de sorte, que si l'on y prend un point à discretion, comme* D, *pour en tirer sur les lignes* AB, AC, *les perpendiculaires* DB, DC, *leur somme* DB+DC, *sera égale à la ligne donnée* AE.

1. Demonstration. *Car, dans les Triangles semblables* AEF, CDH, *on a* AECH ∽ AFCD, *& dans les semblables* AEF, ACG, *on a* AECG ∽ ACEF: *c'est pourquoy on aura* AECG-AECH ∽ ACEF-AFCD; *& à cause de* CG-CH ∽ GH ∽ BD, *on aura* AEBD ∽ ACEF-AFCD.

Si

Digitized by Google

Si on prolonge la ligne DC, *juſqu'à ce qu'elle coupe la ligne* AK, *prolongée en* L, *les deux Triangles* AIK, ACL, *ſeront ſemblables, & l'on aura* AICL ∽ ACIK, *& à cauſe de* IK ∽ EF, *par la conſtruction, on aura* AICL ∽ ACEF; *& ôtant* AFCD, *on aura* AICL-AFCD ∽ ACEF-AFCD; *& ſi à la place de* ACEF-AFCD, *on met* AEBD, *qui luy eſt égal, par l'article precedent, on aura* AICL-AFCD ∽ AEBD; *& ſi à la place de* AI, *on met* AE-AF, *qui luy eſt égal, par la conſtruction, au lieu du Rectangle* AICL, *on aura* AECL-AFCL; *& au lieu de* AICL-AFCD, *on aura* AECL-AFCL-AFCD, *ou* AECL-AFDL, *ou* AECL-AFAM, *à cauſe de* CL†CD ∽ DL ∽ AM; *& enfin au lieu de* AICL-AFCD ∽ AEBD, *on aura* AECL-AFAM ∽ AEBD; *& par l'antitheſe, on aura* AECL-AEBD ∽ AFAM, *& par conſequent cette Analogie,* AE, AF:: AM, CL-BD; *& ſi au lieu de* AM, *on met ſon égale* DL, *ou* CD†CL, *on aura cette derniere Analogie,* AE, AF::CD†CL, CL-BD. 2. 3.

Si dans la premiere Analogie, AE, AF::AM, CL-BD, *on permute, on aura celle-cy,* AE, AM::AF, CL-BD; *& ſi aux deux premiers termes* AE, AM, *on donne la hauteur commune* AE, *on aura cette autre Analogie,* AEq, AEAM::AF, CL-BD; *& ſi à la place du Quarré* AE, *on met le Rectangle* AFAM, *qui luy eſt égal, à cauſe des trois proportionnelles* AI, AE, AM, *par la conſtruction, on aura cette autre Analogie,* AIAM, AEAM::AF, CL-BD; *& ſi au lieu des deux premiers termes* AIAM, AEAM, *dont la hauteur commune eſt* AM, *on met les baſes* AI, AE, *qui ſont en même raiſon, par* 1. 6. *on aura cette autre Analogie,* AI, AE::AF,

CL-BD; *& ſi au lieu du premier terme* AI, *on met* AE-AF, *qui luy eſt égal, par la conſtruction, & qu'on permute, on aura celle-cy,* AE-AF, AF :: AE, CL-BD; *& en compoſant, on aura celle-cy,* AE, AF :: AE † CL-BD, CL-BD; *& enfin, ſi à la place des deux premiers termes* AE, AF, *on met les deux* CD † CL, CL-BD, *qui ſont en même raiſon, par la derniere Analogie de l'article precedent, on aura cette derniere Analogie,* CD † CL, CL-BD :: AE † CL-BD, CL-BD, *& par conſequent* AE † CL-BD ∞ CD † CL; *& par l'antitheſe, on aura* AE ∞ BD † CD. *Ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

IL *s'enſuit, que quand le point* D, *conviendra avec le point* O, *la ſeule perpendiculaire qui tombera du point* O, *ſur* AC, *ſera égale à la ligne* AE. *C'eſt pourquoy, ſi au lieu de* AM ∞ $\frac{aa}{a-c}$, *on fait* AN ∞ AE, *& que par le point* N, *on tire à la ligne* AC, *la parallele* NO, *on aura le point* O. *Et pareillement, ſi l'on faiſoit* AQ, *perpendiculaire à* AB, *& égale à* AE, *& que par le point* Q, *on tirât à la ligne* AB, *la parallele* QP, *on auroit le point* P. *Mais, pour avoir le point* P, *il ſuffira de faire* AP ∞ AO. *D'où il ſuit, que le Triangle* AOP, *ſera toûjours iſoſcele, & que dans un Triangle iſoſcele, comme* AOP, *les deux perpendiculaires* DB, DC, *tirées du point* D, *pris à diſcretion ſur ſa baſe* OP, *ſont enſemble égales à une même ligne, telle qu'eſt ici la ligne donnée* AE, *laquelle eſt égale à la perpendiculaire, qui tomberoit de l'un des deux Angles* O, P, *ſur ſon côté oppoſé.*

SCOLIE.

SI *au lieu de prendre la ſomme* DB † DC, *on veut prendre la ſomme* CH † DH, *pour la rendre égale à la*

Digitized by Google

ligne donnée AE, *on trouvera* $x = \frac{aa}{b+c}$, *qui est un Lieu à la ligne droite, parce que la quantité* y, *qui entre dans la Question, n'est point determinée. Ce Lieu fait connoître que le point* D, *est dans une ligne droite indéfinie parallele à la ligne* AC, *& éloignée de la mesme ligne* AC, *d'une quantité égale à la fraction trouvé* $\frac{aa}{b+c}$. *De sorte que la perpendiculaire* CD, *étant troisiéme proportionnelle aux deux lignes* AF+EF, AE, *la somme* CH+DH, *sera égale à la ligne donnée* AE.

Car, puisque par la construction, nous avons cette Analogie AF+EF, AE::AE, CD, *si à la place des deux premiers termes* AF+EF, AE, *on met les deux* CH+DH, CD, *qui sont en mesme raison, à cause des Triangles semblables* AEF, CDH, *on aura cette autre Analogie*, CH+DH, CD::AE, CD, *& par consequent* CH+DH = AE. *Ce qu'il faloit demontrer.* Demonstration.

QUESTION II.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à celles de leurs Quarrez, soit donnée. *Lieu à la ligne droite.* 2. 2. Dioph.

COMME nôtre intention est de resoudre cette Question aussi bien en Lignes qu'en Nombres, & qu'en Geometrie elle est mal proposée, nous la proposerons plus generalement, en cette sorte: Trouver deux lignes, telles que le Plan sous leur difference & une ligne donnée, soit à la difference de leurs Quarrez, en raison donnée.

On propose de trouver deux lignes AD = x, *&* DE = y, *telles que le Plan* 1x-1y, *sous la ligne donné* AO = 1, *& leur difference* x-y, *soit à la difference* xx-yy, 2. Fig.

de leurs Quarrez, comme AP ∽ r, *à* AQ ∽ f.

Selon la condition de la Queſtion, on aura cette Analogie, lx-ly, xx-yy :: r, f, *ou* l, x + y :: r, f, *& par conſequent cette Equation,* lf ∽ rx + ry, *ou* $y \backsim \frac{lf}{r} - x$, *qui eſt un Lieu à la ligne droite, lequel étant reſolu par* Probl. I. *donne la conſtruction ſuivante.*

Conſtruction. *Ayant fait à volonté l'Angle* BAC, *par les deux lignes* AB, AC, *dont chacune ſoit* $\frac{lf}{r}$, *ou quatriéme proportionnelle aux trois* AP, AQ, AO, *menez la droite* BC, *qui ſera le Lieu qu'on cherche : de ſorte, que ſi on y prend entre* B, *&* C, *un point à diſcretion, comme* E, *pour en tirer à la ligne* AC, *la parallele* DE, *les deux lignes* AD, DE, *ſeront celles qu'on cherche ; c'eſt-à-dire, que le Plan ſous la ligne donnée* AO, *& leur difference* AD-DE, *ſçavoir* AOAD-AODE, *ſera à la difference* ADq-DEq, *de leurs Quarrez, comme* AP, *à* AQ.

Demonſtration. *Car, puiſque nous avons* DB ∽ DE, *à cauſe de* AB ∽ AC, *par la conſtruction, & des deux Triangles ſemblables* BDC, BAC, *nous aurons* AB ∽ AD + DE, *à cauſe de* AB ∽ AD + DB, *& on pourra faire cette Analogie,* AO, AD + DE :: AO, AB ; *& ſi à la place des deux derniers termes* AO, AB, *on met les deux* AP, AQ, *qui ſont en meſme raiſon, par la conſtruction, on aura celle-cy,* AO, AD + DE :: AP, AQ ; *& ſi on donne aux deux premiers termes* AO, AD + DE, *la hauteur commune* AD-DE, *on aura cette derniere Analogie,* AOAD-AODE, ADq-DEq :: AP, AQ. *Ce qu'il faloit demontrer.*

Quand on voudra reſoudre cette Queſtion en Nombres, il ſera plus élegant de mettre $\frac{a.b}{r}$, *pour les deux Nombres qu'on cherche, & ſelon la condition de la Queſtion, on*

Digitized by Google

aura cette Analogie, $\frac{a-b}{x}, \frac{aa-bb}{xx} :: r, f,$ *ou* $x, a+b :: r, f,$ *& par conſequent cette Equation,* $fx \infty ar+br$, *dans laquelle on trouvera* $x \infty \frac{ar+br}{f}$, *& les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,*

$$\frac{af, bf}{ar+br}.$$

Si $r \infty 1$, *&* $f \infty 6$, *& qu'on ſuppoſe* $a \infty 1$, *&* $b \infty 2$, *les deux Nombres ſeront* 2, 4; *& ſi on ſuppoſe* $a \infty 5$, *&* $b \infty 1$, *les deux Nombres ſeront* 5, 1.

On tire de cette ſolution, le Canon ſuivant: Si on multiplie deux Nombres quelconques, chacun par le ſecond terme de la raiſon donnée, & qu'on diviſe chaque produit par le Plan ſous le premier terme & la ſomme des deux mêmes Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Comme cette Queſtion eſt indeterminée, on en peut donner autant de ſolutions indéfinies que l'on voudra, & en tirer autant de Canons differens: mais ce n'eſt pas icy le lieu d'en parler davantage.

QUESTION III.

Trouver deux Nombres, tels que la raiſon de leur ſomme à celle de leurs Quarrez, ſoit donnée. *Lieu au Cercle.* 1. 2. Dioph.

POUR *reſoudre cette Queſtion par Geometrie, nous la propoſerons plus generalement en cette ſorte:* Trouver deux lignes, telles que le Plan ſous leur ſomme & une ligne donnée, ſoit à la ſomme de leurs Quarrez, en raiſon donnée.

On propoſe de trouver deux lignes HC ∞x, *&* HE ∞y, 3. Fig.

3. Fig. *telles que le Plan* $lx+ly$, *sous la ligne donnée* AO $= l$, *& leur somme* $x+y$, *soit à la somme* $xx+yy$ *de leurs Quarrez, comme* AP $= r$, *à* AQ $= s$.

Selon la condition de la Queſtion, on aura cette Analogie, $lx+ly, xx+yy :: r, s$, *& par conſequent cette Equation* $lsx+lsy = rxx+ryy$, *ou* $xx-\frac{lsx}{r} = \frac{lsy}{r}-yy$, *qui eſt un Lieu à un Cercle donné, dont le rayon eſt* $\sqrt{\frac{llss}{4rr}}$, *comme l'on connoît en ôtant les ſeconds termes, ſçavoir en ſuppoſant* $x = u+\frac{ls}{2r}$, *&* $y = z+\frac{ls}{2r}$, *pour avoir cét autre Lieu au Cercle,* $zz = \frac{llss}{4rr}-uu$, *lequel étant reſolu par les preceptes du* Probl. II. *donne la conſtruction ſuivante.*

Conſtruction. *Ayant fait le Triangle iſoſcele rectangle* ABC, *dont chacun des côtez* AB, BC, *ſoit* $\frac{ls}{r}$, *ou quatriéme proportionnel aux trois lignes* 2AP, AO, AQ, *décrivez du centre* A, *par le point* C, *une circonference de Cercle, qui ſera le Lieu qu'on cherche: & pour y determiner en lignes les deux nombres qu'on cherche, tirez le Diametre* FG, *parallele au côté* BC, *& prenez ſur ce Diametre* FG, *un point quelconque* D, *par où vous tirerez au meſme Diametre* FG, *la perpendiculaire* EH, *qui ſera terminée d'un côté en* E, *par la circonference du Cercle, & de l'autre côté en* H, *par la ligne* BC, *prolongée quand il en ſera beſoin; & les lignes* EH, CH, *repreſenteront les deux nombres qu'on cherche, en prenant la lettre* l, *ou la ligne* AO, *pour l'unité: de ſorte que le Plan* AOEH+AOCH, *ſous leur ſomme* EH+CH, *& la ligne donnée* AO, *ſera à la ſomme* EHq+CHq, *de leurs Quarrez, comme* AP, *à* AQ.

Demonſtration. *Pour la demonſtration, prolongez les lignes* EH, CH, *juſqu'à la circonference du Cercle en* I, *& en* L, *& tirez par le point* C, *à la ligne* HI, *la parallele* CN, *& par le point* N, *où elle coupe la circonference du Cercle, &*

Digitized by Google

par le Centre A, à la ligne LC, les paralleles MN, FG.

Cette preparation étant faite, on considerera que la ligne HI, est égale à EH-CL. Car si des deux lignes égales DE, DI, on oste les deux égales TC, TN, ou DH, DM, il restera HI ∞ EM; & à cause de EM ∞ EH-HM, on aura HI ∞ EH-HM; & à cause de HM ∞ 2DH, on aura HI ∞ EH-2DH; & encore à cause de DH ∞ AB, & de AB ∞ BC, on aura HI ∞ EH-2BC; & enfin à cause de 2BC ∞ CL, on aura HI ∞ EH-CL. Ce qu'il faloit demontrer.

Cela étant supposé, puisqu'on a HI ∞ EH-CL, on pourra faire cette Analogie, LH, HI :: LH, EH-CL; & si à la place des deux premiers termes LH, HI, on met les deux EH, CH, qui sont en mesme raison, par la nature du Cercle, on aura cette autre Analogie, EH, CH :: LH, EH-CL, & par consequent cette Equation, EHq-CLEH ∞ CHLH, ou EHq-CLEH ∞ CLCH-CHq, à cause de LH ∞ CL-CH, & par l'antitheſe on aura celle-cy, CLEH + CLCH ∞ EHq + CHq, ou 2ABEH + 2ABCH ∞ EHq + CHq, à cause de CL ∞ 2AB; & donnant à chaque Plan la hauteur commune AP, on aura 2ABAPEH + 2ABAPCH ∞ APEHq + APCHq; & si à la place de 2ABAP, on met AOAQ, qui luy est égal, à cause des quatre proportionnelles 2AP, AO, AQ, AB, par la construction, on aura cette derniere Equation, AOAQEH + AOAQCH ∞ APEHq + APCHq, & par consequent cette Analogie, AQEH + AQCH, EHq + CHq :: AP, AQ. Ce qu'il faloit demontrer.

Pour resoudre cette Question en nombres, on pourra se servir de l'Equation precedente, lfx + lfy ∞ rxx + ryx

dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{1f}{2r} + \sqrt{\frac{111}{4rr}ff + \frac{11}{r}xx}$ - : *& pour avoir une ſolution rationnelle, il faudra égaler au Quarré cette Puiſſance,* $\frac{11ff}{4rr} + \frac{1fx}{r} - xx$, *pour le côté duquel prenant* $\frac{ax}{b} - \frac{1f}{2r}$, *pour avoir une ſolution indéfinie autant generale qu'il eſt poſſible, on trouvera* $x \backsim \frac{fab + fbb}{raa + rbb}$, *& par conſequent* $y \backsim \frac{fab + faa}{raa + rbb}$. *Ainſi les deux Nombres qu'on cherche, ſeront tels,*

$$\frac{fbb + fab, faa + fab}{raa + rbb}.$$

Si $r \backsim 1$, *&* $f \backsim 10$, *& qu'on ſuppoſe* $a \backsim 1$, *&* $b \backsim 2$, *les deux Nombres qu'on cherche, ſeront* 12, 6. *mais ſi l'on ſuppoſe* $a \backsim 3$, *&* $b \backsim 1$, *les deux Nombres ſeront* 4, 12.

Nous avons reſolu cette Queſtion dans nôtre Diophante en pluſieurs manieres differentes, mais ce n'eſt pas icy le lieu d'en parler davantage. Je diray ſeulement que de cette ſolution indéfinie on tire le Canon ſuivant.

Si on multiplie le Plan ſous la ſomme de deux Nombres quelconques & le ſecond terme de la raiſon donnée, par chacun de ces deux mêmes Nombres, & qu'on diviſe chaque ſolide par le ſolide ſous le premier terme & la ſomme des Quarrez des deux mêmes Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

QUESTION IV.

Lieu à la Parabole.

Trouver un Triangle rectangle, dont l'hypotenuſe ſoit moyenne proportionnelle entre un côté & ce même côté augmenté d'une ligne donnée.

4. Fig.

ON propoſe de trouver le Triangle rectangle ABE, *dont l'hypotenuſe* AB, *ſoit moyenne proportionnelle entre*

entre le côté AE, *& le même côté* AE, *augmenté de la Ligne donnée* AD. 4. Fig.

Si l'on suppose AD ∽ *a.*
BE ∽ *x.*
AE ∽ *y.*

on aura ABq ∽ xx † yy, *&* DE ∽ a † y, *& parce que l'on veut que l'Hypotenuse* AB *soit moyenne proportionnelle entre* AE, DE, *le Quarré* AB, *ou* xx † yy *sera égal au Rectangle* DEA, *ou* ay † yy. *Ainsi on aura cette Equation* xx † yy ∽ ay † yy, *ou* xx ∽ ay, *qui est un Lieu à une Parabole donnée, dont le Parametre est* a, *ou* AD, *comme l'on connoît par* Probl. IV. *d'où nous avons tiré cette construction.*

Construction. *Ayant prolongé la Ligne donnée* AB, *indefiniment vers* E, *décrivez par son extremité* A, *sur l'axe* AE, *la Parabole* BAF, *dont le Parametre soit égal à la Ligne donnée* AD, *& cette Parabole ainsi décrite sera le Lieu qu'on cherche : de sorte que si l'on prend sur sa circonference un point à volonté, comme* B, *pour en tirer sur l'axe* AE, *la perpendiculaire* BE, *le Triangle* ABE, *sera tel que son Hypotenuse* AE *sera moyenne proportionnelle entre* AE, DE.

Demonstration. *Car à cause de* ABq ∽ BEq † AEq, *par* 47. 1. *& de* BEq ∽ DAE, *par la proprieté de la Parabole, on aura* ABq ∽ DAE † AEq, *& à cause de* DAE † AEq ∽ DEA, *par* 3. 2. *on aura* ABq ∽ DEA, *& par consequent cette analogie,* DE, AB :: AB, AE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

Lieu à l'Hyperbole.

QUESTION V.

3. 4. Dioph. Trouver deux Nombres, dont la difference ſoit à leur produit en raiſon donnée.

POur reſoudre cette Queſtion par Geometrie, nous la propoſerons plus generalement en cette ſorte: Trouver deux Lignes, telles que le Plan ſous leur difference & une Ligne donnée, ſoit à leur Rectangle en raiſon donnée.

5. Fig. *On propoſe de trouver deux Lignes* LI ∽ x, LE ∽ y, *telles que le Plan* API - APLE, *ſous leur difference* LI - LE, *& la Ligne donnée* AP ∽ l, *ſoit à leur Rectangle* ELI, *comme* AO ∽ r, *à* AQ ∽ ſ.

Selon la condition de la Queſtion, on aura cette analogie, lx - ly, xy :: r, ſ, *& par conſequent cette Equation* lſx - lſy ∽ rxy, *qui eſt un Lieu à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes, où le Rectangle commun eſt* $\frac{l}{rr}$, *comme l'on connoît par* Probl. V. *D'où nous avons tiré cette conſtruction.*

Conſtruction. *Ayant fait un angle quelconque* BAC, *& ayant pris ſur l'une des deux Lignes* AB, AC, *comme ſur* AC, *la Ligne* AD ∽ $\frac{lſ}{r}$, *ou quatriéme proportionnelle aux trois Lignes* AO, AQ, AP, *tirez par le point* D, *à l'autre Ligne* AB, *la Parallele* DE ∽ AD, *& décrivez du centre* A, *par le point* E, *entre les aſymptotes* AB, AC, *l'Hyperbole* FEG, *qui ſera le Lieu qu'on cherche: de ſorte que ſi l'on prend ſur l'aſymptote* AC, *depuis* D *vers* C, *un point à volonté comme* K, *& que par le point* K, *on tire à l'autre aſymptote* AB, *la parallele* KI, *& par le point* I, *à l'aſymptote* AC, *la*

Digitized by Google

parallele HI, *les deux Lignes* LE, LI, *repreſenteront les deux Nombres qu'on cherche, c'eſt à-dire que le Rectangle* APLI-APLE, *ſera au Rectangle* ELI, *comme* AO, *à* AQ. 5. Fig.

Car puiſque par la Nature de l'Hyperbole, on a cette analogie, AK, AD :: DE, KI, *ou* AK, AD :: AD, KI, *à cauſe de* DE ∽ AD, *par la conſtruction, en diviſant on aura celle-cy*, DK, AD :: AD-KI, KI, *ou* LI, AD :: LE, KI, *& en permutant on aura celle-cy*, LI, LE :: AD, KI, *& en diviſant on aura celle-cy*, LI, LI-LE :: AD, AD-KI, *ou* LI, LI-LE :: AD, LE, *& par conſequent* ADLI-ADLE ∽ ELI. *C'eſt pourquoy on pourra faire cette analogie*, ADLI-ADLE, ADq :: ELI, ADq, *& ſi à la place des deux premiers termes* ADLI-ADLE, ADq, *dont la hauteur commune eſt* AD, *on met leurs baſes* LI-LE, AD, *qui ſont en même raiſon, par* 1. 6. *on aura cette autre analogie*, LI-LE, AD :: ELI, ADq, *& donnant aux deux premiers termes* LI-LE, AD, *la hauteur commune* AP, *on aura celle-cy* ; APLI-APLE, APAD :: ELI, ADq, *& en permutant on aura celle-cy*, APLI-APLE, ELI :: APAD, ADq, *& à cauſe de la hauteur* AD, *qui eſt commune aux deux derniers termes* APAD, ADq, *on aura celle-cy*, APLI-APLE, ELI :: AP, AD, *& ſi au lieu des deux derniers termes* AP, AD, *on met les deux* AO, AQ, *qui ſont en même raiſon, par la conſtruction, on aura cette derniere analogie*, APLI-APLE, ELI :: AO, AQ. *Ce qu'il faloit démontrer.* Demonſtration.

Nous avons donné dans nôtre Diophante pluſieurs ſolutions de cette Queſtion en nombres, entre leſquelles

5. Fig. *la ſolution ſuivante eſt la plus ſimple & la plus générale de toutes.*

$\frac{2bf}{af-bf}$, $\frac{2bf}{af+bf}$.

Si r ∽ 1, & f ∽ 6, *& que l'on ſuppoſe* a ∽ 1, & b ∽ 2, *les deux Nombres qu'on cherche, ſeront* 6, 3. *& ſi l'on ſuppoſe* a ∽ 1, & b ∽ 3, *les deux Nombres ſeront* 12, 4. *Ainſi des autres, pourvû que* b *ſoit moindre que* $\frac{af}{f}$.

QUESTION VI.

Lieu à l'Ellipſe. Décrire ſur une baſe donnée un Triangle, tel que la ſomme des Quarrez de ſes deux côtez ſoit égale à la ſomme des Quarrez de la baſe donnée & de ſa perpendiculaire, qui tombe de l'angle oppoſé.

6. Fig. *ON propoſe de décrire ſur la baſe donnée* AB, *le Triangle* ABC, *en ſorte que la ſomme des Quarrez des deux côtez* AC, BC, *ſoit égale à la ſomme du Quarré de la baſe donnée* AB, *& du Quarré de ſa perpendiculaire* CD.

Si l'on ſuppoſe... AB ∽ *a*.
CD ∽ *x*.
AD ∽ *y*.

On aura BD ∽ *a* − *y*.
ACq ∽ *xx* + *yy*.
BCq ∽ *xx* + *yy* − 2*ay* + *aa*.

& parce que l'on veut que la ſomme des Quarrez CA, CB, *ſoit égale à celle des Quarrez* AB, CD, *on aura cette Equation*, 2xx + 2yy − 2ay + aa ∽ xx + aa, *ou* yy − ay ∽ $-\frac{1}{2}$xx, *qui eſt un Lieu à une Ellipſe donnée, dont un Diametre eſt* a, *& ſon Parametre eſt*

Digitized by Google

2a, *c'eſt pourquoy le ſecond Diametre ſera* R 2aa, *comme l'on connoît par* Probl. III. *d'où nous avons tiré cette conſtruction.* 6. Fig.

Tirez par le point E, *milieu de la baſe donnée* AB, *à la même Ligne* AB, *la perpendiculaire* FG, *dont la longueur ſe terminera en cette ſorte. Ayant pris ſur la perpendiculaire* FG, *les deux Lignes* EH, EI, *égales chacune à* AE, *ou à* BE, *menez la droite* AI, *& faites les Lignes* EF, EG, *égales chacune à cette droite* AI, *pour décrire des deux Foyers* H, I, *à l'entour des deux axes* AB, FG, *une Ellipſe, qui ſera le Lieu qu'on cherche: de ſorte que ſi on prend ſur ſa circonférence un point à volonté, comme* C, *pour le ſommet du Triangle* ABC, *ce Triangle* ABC, *ſatisfera à la Queſtion, c'eſt-à-dire que ſi du point* C, *on tire ſur la baſe* AB, *la perpendiculaire* CD, *la ſomme* ACq + BCq *ſera égale à la ſomme* ABq + CDq. Conſtruction.

Car puiſque le Parametre de l'Ellipſe eſt double de ſon Diametre AB, *par la conſtruction on aura* 2ADB ∽ CDq, *par la Nature de l'Ellipſe, & ajoûtant* ADq, *&* BDq, *on aura ces deux Equations,* 2ADB + ADq ∽ ACq, *&* 2ADB + BDq ∽ BCq, *dont la ſomme donnera cette troiſiéme Equation,* 2ADB + ADq + 2ADB + BDq ∽ ACq + BCq, *& à cauſe de* 2ADB ∽ CDq, *comme il a eſté démontré, & de* ADq + 2ADB + BDq ∽ ABq, *par* 4. 2. *on aura* CDq + ABq ∽ ACq + BCq. *Ce qu'il falois démontrer.* Demonſtration.

Digitized by Google

PROBLEME I.

Conſtruire un Lieu à la Ligne droite.

LEs Equations qui donnent des Lieux *ſimples*, ou des Lieux *à la Ligne droite*, ſe peuvent toutes reduire à l'une des quatre formules ſuivantes;

$$y \backsim \frac{ax}{b}.$$
$$y \backsim \frac{ax}{b} + c.$$
$$y \backsim \frac{ax}{b} - c.$$
$$y \backsim c - \frac{ax}{b}.$$

Premiere Equation. 7. Fig. Pour conſtruire le Lieu de la premiere Equation, $y \backsim \frac{ax}{b}$, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & que l'angle des deux Lignes inconnuës, x, y, ſoit égal au donné CAD. Suppoſons encore que de l'extremité B, de la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, il parte la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit égal au donné CAD. Cette Ligne BE $\backsim y$ ſera terminée en E, de quelque grandeur que ſoit la Ligne AB $\backsim x$, par la Ligne Locale AG, qu'on tirera en cette ſorte.

Digitized by Google

A cause de la fraction $\frac{ax}{b} \backsim y$, on a cette analogie, $b, a :: x, y$; qui fait connoistre que les quatre Lignes b, a, x, y, sont les côtez homologues de deux Triangles semblables, & que par consequent l'angle des deux premieres b, a, est égal à celuy des deux dernieres x, y; Si donc on prend sur la Ligne indefinie $AB \backsim x$, la Ligne $AF \backsim b$, & que par le point F, on tire à la Ligne AD, la parallele $FG \backsim a$, la droite AG sera le Lieu de la premiere Equation $y \backsim \frac{ax}{b}$. Construction. 7. Fig.

Car si sur cette Ligne AG, on prend tel point que l'on voudra, entre A, & G, ou audelà de G, comme E, & que par ce point E on tire à la Ligne AD, la parallele EB, en supposant $AB \backsim x$, & $EB \backsim y$, on aura dans les deux Triangles semblables, ABE, AFG, cette analogie, $AB, BE :: AF, FG$, ou $x, y :: b, a$, & par consequent cette Equation, $ax \backsim by$, ou $y \backsim \frac{bx}{a}$, qui est la même que la proposée. Demonstration.

Pour construire le Lieu de la deuxiéme Equation, $y \backsim \frac{ax}{b} + c$, supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée $AB \backsim x$, & que l'angle des deux Lignes inconnuës x, y, soit égal au donné CAD. Supposons encore que de l'extremité B de la Ligne indeterminée $AB \backsim x$, il parte la Ligne indeterminée $BE \backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit égal au donné CAD. Cette Ligne $BE \backsim y$, sera terminée en E par la Ligne Locale HK, que l'on tirera en cette sorte. Deuxiéme Equation. 8. Fig.

Si l'on suppose la fraction $\frac{ax}{b} \backsim z$, on aura cette analogie, $b, a :: x, z$, qui fait connoître que les quatre Lignes $b, a : x, z$, sont les côtez homologues de deux Triangles semblables, & que par con- Construction.

8. Fig. ſequent l'angle des deux premieres b, a, eſt égal à celuy des deux dernieres x, z. Si donc on prend ſur la Ligne indefinie AB $\backsim x$, la Ligne AF $\backsim b$, & que par le point F, on tire à la Ligne AD, la parallele FG $\backsim a$, en joignant la droite AG, on aura ſur la Ligne BE, la Ligne BI $\backsim z \backsim \frac{ax}{b}$, à laquelle on doit ajoûter la Ligne IE $\backsim c$, parce que dans l'Equation il y a $\frac{ax}{b} + c$, mais comme le point B n'eſt pas determiné, recourons au point fixe A, & prenons ſur la Ligne AD, la Ligne AH $\backsim c$, & tirons par le point H, à la Ligne AG, la parallele HK, qui ſera le Lieu qu'on cherche, & la demonſtration s'en fera comme auparavant.

Troiſiéme Equation. Pour conſtruire le Lieu de la troiſiéme Equation, $y \backsim \frac{ax}{b} - c$, on fera une conſtruction ſemblable à la precedente, excepté qu'il faut ôter de la Ligne BI $\backsim \frac{ax}{b}$, 9. Fig. la Ligne IE $\backsim c$, à cauſe de $\frac{ax}{b} - c$, c'eſt-à-dire qu'il faut prendre ſur la Ligne AD prolongée *en bas*, la Ligne AH $\backsim c$, & la Ligne LK ſera le Lieu qu'on cherche, & la démonſtration s'en fera de la même façon.

Quatriéme Equation. Pour conſtruire le Lieu de la quatriéme Equation, $y \backsim c - \frac{ax}{b}$, on fera une conſtruction ſemblable à la pre- 10. Fig. cedente, excepté qu'il faut ôter de la Ligne IE $\backsim c$, la Ligne BI $\backsim \frac{ax}{b}$, à cauſe de $c - \frac{ax}{b}$, c'eſt-à-dire qu'il faut tirer en bas au deſſous de la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE des deux Lignes indeterminées ſoit égal au complement à 180 degrez de l'angle donné CAD, & la Ligne HL ſera le Lieu qu'on cherche, & la démonſtration s'en fera de la même façon.

PROBLEME II.

Digitized by Google

PROBLEME II.

Conſtruire un Lieu au Cercle.

Comme les Equations qui donnent des Lieux au Cercle, peuvent arriver en pluſieurs maniéres differentes, & qu'il ſeroit trop long de les rapporter icy toutes, nous donnerons ſeulement icy quelques exemples, qui pourront ſervir à proportion pour la ſolution des autres, en commençant par les plus ſimples.

Premier Exemple.

Propoſons donc premierement ce Lieu au Cercle, $yy \backsim aa - xx$. Puiſque $aa - xx$ eſt la difference de deux Quarrez, elle eſt produite par la ſomme $a + x$, & par la difference $a - x$ de leurs côtez : & puiſque le Rectangle ſous $a + x$ & $a - x$, ſçavoir $aa - xx$, eſt égal au Quarré yy, on doit conſiderer la quantité inconuë y, comme une ordonnée au Diametre d'un Cercle, dont le rayon ou demy Diametre eſt a : & puiſque $a + x$, $a - x$, ſont des Lignes, la quantité inconnuë x, doit être en ligne droite avec la connuë a, & elle doit repreſenter la partie du Diametre compriſe entre le centre & l'ordonnée.

Conſtruction. II. Fig.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit droit, car s'il n'étoit pas droit, au lieu d'un *Cercle* on auroit une *Ellipſe*. Parce que la Ligne AB $\backsim x$, n'eſt pas ſi grande que le rayon AC $\backsim a$, à cauſe de $a - x$, prenez ſur cette même Ligne AB $\backsim x$, prolongée, d'un côté la Ligne AC $\backsim a$, & de l'autre côté la Ligne AD $\backsim a$, pour avoir BC $\backsim$

Digitized by Google

11. Fig. $a-x$, & DB $\backsim a+x$, & parce que le Rectangle DBC, ou $aa-xx$, eſt égal au Quarré yy, on connoît que la quantité inconnuë y, eſt moyenne proportionnelle entre DB, BC, ou entre $a+x$, $a-x$. Ainſi la perpendiculaire BE, doit être priſe pour l'indeterminée y, & elle ſera terminée en E, par la circonference d'un Cercle décrit du centre A, par les extremitez C, D, du Diametre CD. Ainſi cette circonference ſera le Lieu de l'Equation propoſée, $yy \backsim aa-xx$.

Demonſtration. Car ſi l'on prend ſur cette circonference un point tel que l'on voudra, comme E, & que l'on en tire ſur le Diametre BC, la perpendiculaire EB, comme nous avons ſuppoſé AD, ou AC $\backsim a$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on aura DB $\backsim a+x$, & BC $\backsim a-x$, & parce que le Rectangle DBC eſt égal au Quarré BE, par la proprieté du Cercle, on aura cette Equation, $yy \backsim aa-xx$, qui eſt la même que la propoſée.

Second Exemple. Propoſons maintenant ce Lieu au Cercle, $yy \backsim bx-xx$, ou $xx-bx \backsim -yy$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, pour la rendre de même forme que la precedente, en ſuppoſant $x \backsim z+\frac{1}{2}b$, & vous aurez cet autre Lieu au Cercle, $zz \backsim \frac{1}{4}bb-yy$, duquel on tirera aiſément une conſtruction par un raiſonnement ſemblable au precedent. C'eſt pourquoy il ſuffit de regarder la Figure, & icy les noms de chaque Ligne, qui ſerviront tant pour la conſtruction que pour la démonſtration.

12. Fig.

AB $\backsim x$.
BE $\backsim y$.
AD $\backsim b$.

Digitized by Google

AC ∽ $\frac{1}{2}b$ ∽ CD. 12. Fig.

BD ∽ $b - x$.

BC ∽ z ∽ $x - \frac{1}{2}b$.

Propoſons encore ce Lieu au Cercle, $yy - by \backsim cx -$ Troiſiéme Exemple. xx. Il en faut premierement ôter les ſeconds termes, en ſuppoſant $y \backsim z + \frac{1}{2}b$, & $x \backsim w + \frac{1}{2}c$ pour avoir cet autre Lieu au Cercle, $zz \backsim \frac{bb + cc}{4} - ww$, ou $zz \backsim mm - ww$, en ſuppoſant $\frac{bb + cc}{4} \backsim mm$, duquel on tirera aiſément une conſtruction à l'imitation de la precedente. C'eſt pourquoy il vous ſuffira de regarder la Figure, & icy 13. Fig. les noms de chaque Ligne.

AB ∽ x.

BE ∽ y.

DF ∽ $\frac{1}{2}b$.

AD ∽ $\frac{1}{2}c$.

AC ∽ c.

AF ∽ m ∽ $\frac{1}{2}$R. $bb + cc$

BC ∽ $c - x$.

EI ∽ $y - \frac{1}{2}b$ ∽ z.

FI ∽ $x - \frac{1}{2}c$ ∽ w.

BC ∽ $y - b$.

PROBLEME III.

Conſtruire un Lieu à l'Ellipſe.

Comme les Equations qui donnent des Lieux à l'Ellipſe, peuvent arriver en pluſieurs maniéres differentes, & qu'il ſeroit trop long de les expliquer icy toutes, nous donnerons ſeulement quelques exemples des cas les plus difficiles, en commençant par les plus faciles, pour pouvoir à leur imitation reſoudre les autres.

Premier Exemple. Proposons donc premierement ce Lieu à l'Ellipse ; $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$. Pour construire cette Ellipse, vous considererez que la nature d'une Ellipse étant telle, que le Diametre est à son Parametre, comme le Rectangle sous les parties du même Diametre est au Quarré de l'ordonnée correspondante, & que reduisant l'Equation proposée, $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$, en proportion on a cette analogie, $b, c :: aa - xx, yy$, on doit considerer les quantitez b, c, comme deux termes homologues au Diametre & à son Parametre, & alors le Rectangle $aa - xx$, dont les côtez sont $a + x, a - x$, sera le Rectangle des deux parties du Diametre, lesquelles par consequent seront $a + x, a - x$, & le côté y du Quarré yy sera l'ordonnée correspondante à ces deux parties. C'est pourquoy il faut comme dans le Cercle, que le demy Diametre soit a, & que sa partie comprise entre le centre & l'ordonnée soit x.

Construction. 14. Fig. Supposons donc que du point fixe A il parte la Ligne indeterminée $AB \backsim x$, & parce que cette Ligne n'est pas si grande que le demy Diametre a, à cause du côté precedent $a - x$, prenez sur cette même Ligne $AB \backsim x$, prolongée de côté & d'autre les Lignes AC, AD, égales chacune à la quantité connuë a, pour avoir $BC \backsim a - x$, & $DB \backsim a + x$. Et parce que les deux quantitez inconnuës x, y, doivent faire un angle donné, supposons que de l'extremité B, de la Ligne indefinie $AB \backsim x$, il parte la Ligne indeterminée, $BE \backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit égal au donné. Aprés cela décrivez du centre A, à l'entour du Diametre CD, une Ellipse, dont le Diametre CD soit à son Parametre CG, comme b à c, & dont

Digitized by Google

les ordonnées au même Diametre CD, ſoient paralleles à la Ligne BE, & cette Ellipſe ainſi décrite ſera le Lieu de l'Equation propoſée $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$. 14. Fig.

Car ſi l'on prend ſur la circonference de cette Ellipſe un point à volonté, comme E, & qu'on en tire au Diametre CD, l'ordonnée EB, comme nous avons fait AC $\backsim a$, & AD $\backsim a$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on aura BD $\backsim a + x$, & BC $\backsim a - x$, & parce que le Diametre CD eſt à ſon Parametre CG, comme b à c, par la conſtruction, & que cette raiſon eſt égale à celle du Rectangle DBC, au Quarré BE, c'eſt-à-dire à celle du Rectangle $aa - xx$, au Quarré yy, par la nature de l'Ellipſe, on aura cette analogie, b, $c :: aa - xx$, yy, & conſequemment cette Equation; $byy \backsim aac - cxx$, ou $xx \backsim aa - \frac{byy}{c}$, qui eſt la même que la propoſée. Demonſtration.

Propoſons ce Lieu à l'Ellipſe $xx + dx \backsim aa - \frac{byy}{c}$. Il le faut premierement reduire à un de même forme que le precedent, en ôtant le ſecond terme, ſçavoir en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}d$, pour avoir ce Lieu reduit, $zz \backsim aa + \frac{1}{4}dd - \frac{byy}{c}$, ou $zz \backsim mm - \frac{byy}{c}$, en ſuppoſant $aa + \frac{1}{4}dd \backsim mm$. Si l'on fait dans ce Lieu reduit un raiſonnement ſemblable au precedent, on connoîtra que le demy Diametre de l'Ellipſe eſt m, ou R. $aa + \frac{1}{4}dd$, & que ce Diametre eſt à ſon Parametre comme b à c. D'où l'on tirera aiſément une conſtruction: c'eſt pourquoy je me contenteray de vous donner ſeulement la conſtruction toute faite, & icy les noms de chaque Ligne, qui ſerviront tant pour la conſtruction que pour la démonſtration. Deuxiéme Exemple. 15. Fig.

15. Fig.

$AB \backsim x.$
$BE \backsim y.$
$AC \backsim \frac{1}{2}d.$
$CF \backsim m \backsim R.\ aa + \frac{1}{4}dd \backsim CG.$
$FG \backsim 2m \backsim R.\ 4aa + dd.$
$BC \backsim z.$
$BF \backsim m + z.$
$BG \backsim m - z.$

Diam. Param. :: b, c. *Param.* $\backsim \frac{2cm}{b}$.

Autre construction.

On peut trouver une autre construction, en reduisant la derniere Equation $zz \backsim mm - \frac{byy}{c}$, en celle-cy, $yy \backsim \frac{cmm}{b} - \frac{czz}{b}$, qui nous fait connoître que le demy Diametre de l'Ellipse est $R\ \frac{cmm}{b}$, ou $R.\ \frac{aac}{b} + \frac{cdd}{4b}$, & que le Diametre doit être à son Parametre, comme c à b, & de plus que la partie du Diametre compriſe entre le centre & l'ordonnée doit être y. Ainſi en faiſant un raiſonnement ſemblable au precedent, on trouvera aiſément une conſtruction. C'eſt pourquoy pour ne pas dire pluſieurs fois la même choſe, je me contenteray de vous donner ſimplement la Figure, & icy les noms de chaque Ligne qui ſerviront, tant pour la conſtruction, que pour la démonſtration.

16. Fig.

$AB \backsim y.$
$BE \backsim x.$
$AC \backsim \frac{1}{2}d.$
$DE \backsim z.$
$m \backsim R.\ aa + \frac{1}{4}dd.$
$CF \backsim R\ \frac{cmm}{b}.$
$DF \backsim R\ \frac{cmm}{b} + y.$
$DG \backsim R\ \frac{cmm}{b} - y.$

Digitized by Google

FG ∽ R $\frac{4cmm}{b}$.

16. Fig.

Diam. Param. :: *c*, *b*. *Param.* ∽ $\frac{R4bmm}{c}$.

Troiſiéme Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Ellipſe, $xx - dx \backsim ay - \frac{byy}{c}$. Il le faut premierement reduire à un de même forme que le premier, en ôtant les ſeconds termes, ſçavoir en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}d$, pour avoir cette autre Equation, $zz - \frac{1}{4}dd \backsim ay - \frac{byy}{c}$, ou $yy - \frac{acy}{b} \backsim \frac{cdd}{4b} - \frac{czz}{4b}$, d'où l'on ôtera encore le ſecond terme, en ſuppoſant $y \backsim \omega + \frac{ac}{2b}$, pour avoir ce Lieu reduit, $zz \backsim \frac{aac}{4b} + \frac{1}{4}dd - \frac{b\omega\omega}{c}$, ou $zz \backsim mm - \frac{b\omega\omega}{c}$, en ſuppoſant $\frac{aac}{4b} + \frac{1}{4}dd \backsim mm$. Faiſant dans ce Lieu reduit un raiſonnement ſemblable au precedent, on connoîtra que le demy Diametre de l'Ellipſe eſt *m*, ou R. $\frac{aac}{4b} + \frac{1}{4}dd$, & que le Diametre eſt à ſon Parametre, comme *b* à *c*.

Conſtruction. 17. Fig.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB ∽ *x*, de laquelle il faut ôter la Ligne AC ∽ $\frac{1}{2}d$, pour avoir BC ∽ *z*, à cauſe de $x \backsim z + \frac{1}{2}d$: & parce que les quantitez inconnuës *x*, *y*, doivent faire un angle donné, ſuppoſons que de l'extremité B, de la Ligne indefinie AB ∽ *x*, il parte la Ligne indeterminée BE ∽ *y*, en ſorte que l'angle ABE, ſoit égal au donné. Il faut ôter de cette Ligne BE ∽ *y*, la Ligne BH ∽ $\frac{ac}{2b}$, pour avoir EH ∽ ω, à cauſe de $y - \frac{ac}{2b} \backsim \omega$: mais comme le point B, n'eſt pas determiné, tirez du point fixe A, à la Ligne BE, la parallele AD ∽ $\frac{ac}{2b}$, & par le point D, à la Ligne AB, la parallele DH, car ainſi en quelque Lieu que ſoit la Ligne BE, vous aurez toûjours EH ∽ $y - \frac{ac}{2b}$, ou EH ∽ ω, & DH ∽ *x*. Ainſi les deux quantitez *z*, ω, du Lieu reduit $zz \backsim mm - \frac{b\omega\omega}{c}$, ſeront repreſentées par les deux Lignes BC, EH, & comme

Digitized by Google

17. Fig. leurs extremitez ne ſe joignent pas, car elles doivent toûjours faire un angle donné, on tirera par le point C, à la Ligne BE, la parallele CO, & on prendra OH pour z, parce qu'elle eſt égale à BC. Et parce que par le Lieu reduit $zz \backsim mm - \frac{bnn}{c}$, on connoît que z, ou OH, eſt la partie du Diametre terminée par le centre & par l'ordonnée, il faut que le Diametre de l'Ellipſe ſoit ſur la Ligne DH, & que ſon centre ſoit au point O. Si donc on prend ſur la Ligne DH, de côté & d'autre les Lignes OF, OG, égales chacune à m, on aura le Diametre FG, à l'entour duquel on décrira une Ellipſe, dont le Diametre ſoit à ſon Parametre comme b, à c, & dont les ordonnées ſoient paralleles à la Ligne BE, & cette Ellipſe ainſi décrite ſera celle qu'on cherche, & la démonſtration s'en fera comme auparavant.

Quatriéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Ellipſe, $yy - \frac{dxy}{f} \backsim aa - \frac{bxx}{c}$. Il le faut premierement reduire à une autre de même forme que le premier, en ôtant le ſecond terme, ſçavoir en ſuppoſant $y \backsim z \frac{+dx}{2f}$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz \backsim aa - \frac{bxx}{c} + \frac{ddxx}{4ff}$, ou $zz \backsim aa - \frac{4bffxx+cddxx}{4cff}$, ou $zz \backsim aa - \frac{mxx}{n}$, en ſuppoſant $-4bff + cdd \backsim -m$, & $4cff \backsim n$.

Conſtruc. n. 18. Fig. Ce Lieu étant ainſi reduit, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & que de ſon extremité B il parte la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ôter de cette Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BH $\backsim \frac{dx}{2f}$, pour avoir EH $\backsim z$, à cauſe de $y - \frac{dx}{2f} \backsim z$; Mais parce que le point B, n'eſt pas déterminé, prenez la Ligne AC $\backsim 2f$, ſur la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & menez par le point C, à la

à la Ligne BE, la parallele CD ∽ d ; car ainſi menant la droite AD, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle coupe la Ligne BE, en H, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours BH ∽ $\frac{dx}{af}$, à cauſe des Triangles ſemblables ACD, ABH, & conſequemment EH ∽ z. Et parce que dans le Triangle ACD, on connoît outre les côtez AC, CD, l'angle C, le troiſiéme côté AD ſera auſſi connu, & ſi on le nomme r, on aura AH ∽ $\frac{rx}{af}$; Ainſi les deux quantitez indeterminées x, z, du Lieu reduit zz ∽ $aa - \frac{mxx}{n}$ ſeront repreſentées par les deux Lignes AB, EH, & parce que leurs extremitez ne ſe joignent pas, on prendra AH pour AB : mais comme AH n'eſt pas égale à AB, ſi l'on change AB en AH, c'eſt-à-dire x en $\frac{rx}{af}$, on doit auſſi changer le Lieu reduit zz ∽ $aa - \frac{mxx}{n}$, ou $\frac{nzz}{m}$ ∽ $\frac{aan}{m} - xx$, en un autre conforme à la valeur $\frac{rx}{af}$ de AH, ſçavoir où au lieu du ſimple Quarré xx de la Ligne AB ∽ x, il y ait le Quarré $\frac{rrxx}{4ff}$ de la Ligne AH ∽ $\frac{rx}{af}$, en le multipliant par le Quarré $\frac{rr}{4ff}$, car ainſi on aura cet autre Lieu reduit, $\frac{nrrzz}{4ffm}$ ∽ $\frac{aanrr}{4ffm} - \frac{rrxx}{4ff}$, qui appartient à une Ellipſe, dont le Diametre eſt à ſon Parametre, comme nrr à $4ffm$, car en reduiſant ce Lieu en proportion, on a cette analogie, nrr, $4ffm$ :: $\frac{aanrr}{4ffm} - \frac{rrxx}{4ff}$, zz, qui fait connoître que R $\frac{rrxx}{4ff}$, ou $\frac{x}{af}$, ou AH eſt la partie du Diametre entre le centre & l'ordonnée ; & comme l'ordonnée eſt EH, il faut que le Diametre de l'Ellipſe ſoit ſur la Ligne AH, & que le centre ſoit en A. Aprés quoy le reſte ſera facile à achever, en conſiderant les noms des Lignes que nous avons icy ajoûtez.

18 Fig.

Digitized by Google

18. Fig.

$AB \backsim x$.
$BE \backsim y$.
$EH \backsim z$.
$AC \backsim 2f$.
$CD \backsim d$.
$AD \backsim r$.
$AH \backsim \frac{rx}{2f}$.
$BH \backsim \frac{dx}{2f}$.
$AF \backsim R \frac{aanrr}{4ffm}$.
$FH \backsim R \frac{aanrr}{4ffm} + \frac{rx}{2f}$.
$GH \backsim R \frac{aanrr}{4ffm} - \frac{rx}{2f}$.
$m \backsim 4bff - cdd$.
$n \backsim 4cff$.

Diam. Param. :: nrr , $4ffm$.

Cinquiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Ellipſe, $yy + \frac{dxy}{f} \backsim ax - \frac{bxx}{c}$. Il le faut premierement reduire à un de même forme que le premier, en ôtant le ſecond terme, ſçavoir en ſuppoſant premierement $y \backsim z - \frac{dx}{2f}$, pour avoir cet autre Lieu $zz \backsim ax - \frac{bxx}{c} + \frac{ddxx}{4ff}$, ou $zz \backsim ax + \frac{cddxx - 4bffxx}{4cff}$, ou $zz \backsim ax - \frac{mxx}{n}$, en ſuppoſant $cdd - 4bff \backsim m$, & $4cff \backsim n$, comme auparavant, ou bien encore $xx - \frac{nx}{m} \backsim - \frac{nzz}{m}$, & en ſuppoſant derechef $x \backsim w + \frac{an}{2m}$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ww \backsim \frac{aann}{4mm} - \frac{nzz}{m}$.

Conſtruction. 19. Fig. Ce Lieu étant ainſi reduit, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie $AB \backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indeterminée $BE \backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à cette Ligne $BE \backsim y$, la Ligne $BH \backsim \frac{dx}{2f}$, pour avoir $EH \backsim z$, à cauſe de $y + \frac{dx}{2f} \backsim z$. Mais parce que le point B n'eſt pas determiné, faites $AD \backsim 2f$, & menez par le point D à la Ligne BE, la parallele DO

Digitized by Google

$\backsim d$, car ainſi menant la droite AO, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle coupe la Ligne BE auſſi prolongée en H, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours BH $\backsim \frac{dx}{af}$, à cauſe des Triangles ſemblables ADO, ABH. Nous avons donc EH $\backsim z$, qui eſt une des quantitez inconnuës du Lieu reduit $ww \backsim \frac{aann}{4mm} - \frac{nzz}{m}$; & pour trouver l'autre, qui eſt w, parce que nous avons ſuppoſé $x - \frac{am}{m} \backsim w$, il faut ôter de AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim \frac{an}{2m}$, pour avoir CB $\backsim w$, & ſi l'on tire par le point C, à la Ligne BE, la parallele CI, & que l'on nomme r la Ligne AO, on aura IH $\backsim \frac{rw}{af}$, à cauſe des quatre Lignes proportionnelles, AD, AO, CB, IH. Ainſi les deux quantitez indeterminées z, w, du Lieu reduit $ww \backsim \frac{aann}{4mm} - \frac{nzz}{m}$, ſeront repreſentées par les deux Lignes EH, BC: & comme leurs extremitez ne ſe joignent pas, on prendra IH pour BC. Mais comme IH n'eſt pas égale à BC, ſi l'on change BC $\backsim w$, en IH $\backsim \frac{rw}{af}$, il faut auſſi changer le Lieu reduit $ww \backsim \frac{aann}{4mm} - \frac{nzz}{m}$, en celuy-cy, $\frac{rrww}{4ff} \backsim \frac{aannrr}{16ffmm} - \frac{nrrz}{4fm}$ qui appartient à une Ellipſe, dont le demy Diametre eſt $\frac{anr}{4fm}$, & dont le Diametre eſt à ſon Parametre comme nrr à $4ffm$, car en reduiſant le dernier Lieu reduit $\frac{rrww}{4ff} \backsim \frac{aannrr}{16ffmm} - \frac{nrrz}{4fm}$, en proportion, on a cette analogie, nrr, $4ffm :: \frac{aannrr}{16ffmm} - \frac{rrww}{4ff}$, zz, qui fait connoître que $\frac{rw}{af}$, ou IH eſt la partie du Diametre entre le centre & l'ordonnée, & comme l'ordonnée eſt EH, il faut que le Diametre de l'Ellipſe ſoit ſur la Ligne IH, & que le centre ſoit en I, &c.

19. Fig.

Propoſons encore ce Lieu à l'Ellipſe, $yy + gy - \frac{dxy}{f} \backsim aa - \frac{bxx}{c}$. Il le faut premierement reduire en un de même forme que le premier, en ôtant les ſeconds termes,

Sixiéme Exemple.

ſçavoir en ſuppoſant premierement $y \backsim z - \frac{1}{2}g + \frac{dx}{2f}$, pour avoir cet autre Lieu, $zz \backsim \frac{1}{4}gg - \frac{dgx}{2f} + \frac{ddxx}{4ff} + aa - \frac{bxx}{c}$, ou $zz - \frac{1}{4}gg - aa \backsim \frac{cddxx - 4bffxx}{4cff} - \frac{dgx}{2f}$, ou $zz - pp \backsim -\frac{mxx}{n} - \frac{dgx}{2f}$, en ſuppoſant $cdd - 4bff \backsim -m$, $4cff \backsim n$, & $\frac{1}{4}gg + aa \backsim pp$, ou bien encore $xx + \frac{dgnx}{2fm} \backsim \frac{npp}{m} - \frac{nzz}{m}$, & en ſuppoſant derechef $x \backsim \omega - \frac{dgx}{4fm}$, pour avoir ce Lieu ſans ſecond terme, $\omega\omega \backsim \frac{ddnngg}{16ffmm} + \frac{npp}{m} - \frac{nzz}{m}$, ou $\omega\omega \backsim qq - \frac{nzz}{m}$, en ſuppoſant $\frac{ddnngg}{16ffmm} + \frac{npp}{m} \backsim qq$.

Conſtruction. 20. Fig.

Ce Lieu étant ainſi reduit, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AG $\backsim \frac{dgn}{4fm}$, pour avoir CB $\backsim \omega$, à cauſe de $x \backsim \omega - \frac{dgn}{4fm}$. Il faut auſſi ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BN $\backsim \frac{1}{2}g$, pour avoir EN $\backsim y + \frac{1}{2}g$, & en ôter la Ligne NH $\backsim \frac{dx}{2f}$, pour avoir EH $\backsim z$, à cauſe de $y \backsim z - \frac{1}{2}g + \frac{dx}{2f}$. Mais parce que le point B n'eſt pas déterminé, tirez par le point C à la Ligne BE, la parallele CD $\backsim \frac{1}{2}g$, & par le point D, à la Ligne AB, la parallele DN $\backsim \omega$, pour avoir EN $\backsim y + \frac{1}{2}g$. Tirez encore par le point A à la Ligne BE, la parallele AL $\backsim \frac{1}{2}g$, & ayant fait la Ligne LI $\backsim 2f$, tirez par le point I, à la Ligne BE, la parallele IK $\backsim d$, car ainſi menant la droite LK, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne EB en H, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne EB, on aura toûjours NH $\backsim \frac{dx}{2f}$, & conſequemment EH $\backsim z$. Enfin prolongez la même Ligne LK, juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne CD auſſi prolongée en O, par où vous menerez à la Ligne AB la parallele OM $\backsim \omega$. Et parce que le côté LK du Triangle LIK, eſt donné, ſi on

Digitized by Google

le nomme r, on aura OH $\backsim \frac{r\omega}{2f}$ à cauſe des Triangles ſemblables LIK, OMH. Ainſi les deux quantitez indeterminées z, ω, de l'Equation reduite, $\omega\omega \backsim qq - \frac{nzz}{m}$, ſeront repreſentées par les Lignes EH, OM; & comme leurs extremitez ne ſe joignent pas, on prendra OH pour OM, ou $\frac{r\omega}{2f}$ pour ω, & $\frac{rr\omega\omega}{4ff} \backsim \frac{qqrr}{4ff} - \frac{nrzz}{4ffm}$, ou $\frac{nrrzz}{4ffm} \backsim \frac{qqrr}{4ff} - \frac{rr\omega\omega}{4ff}$ pour $\omega\omega \backsim qq - \frac{nzz}{m}$, où l'on void que ce dernier Lieu appartient à une Ellipſe, dont le Diametre eſt à ſon Parametre, comme nrr à $4ffm$, &c. 20. Fig.

PROBLEME IV.

Conſtruire un Lieu à la Parabole.

Les Lieux qui appartiennent à la Parabole, ſe peuvent tous reduire à l'une des quatre formules ſuivantes.

$$yy \backsim ax$$
$$yy \backsim ax + bb.$$
$$yy \backsim ax - bb.$$
$$yy \backsim bb - ax.$$

Pour conſtruire le Lieu de la premiere Equation, $yy \backsim ax$, ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & que de ſon extremité B il parte la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Puiſque le Quarré yy de la Ligne BE $\backsim y$, eſt égal au Rectangle ax, on la doit conſiderer comme l'ordonnée dans une Parabole, & la Ligne AB $\backsim x$, comme la partie du Diametre compriſe entre le ſommet & l'ordonnée. D'où il ſuit que le Diametre de cette Parabole eſt ſur la Ligne AB, & que le ſommet eſt en A, & de plus que le Parametre eſt a. Premiere Equation. 21. Fig.

Construction. 21. Fig. Si donc on décrit sur le Diametre AD, une Parabole, dont le Parametre AC ∽ a, & dont les ordonnées soient paralleles à la Ligne BE, cette Parabole ainsi décrite sera le Lieu de l'Equation proposée $yy \backsim ax$.

Demonstration. Car si on prend sur la circonference de cette Parabole un point à volonté, comme E, & qu'on en tire sur le Diametre AD, l'ordonnée BE; comme nous avons fait AC ∽ a, si l'on suppose AB ∽ x, & BE ∽ y, parce que le Rectangle CAB est égal au Quarré de l'ordonnée EB, par la nature de la Parabole, on aura cette Equation, $yy \backsim ax$, qui est la même que la proposée.

Deuxiéme Equation. 22. Fig. Pour construire le Lieu de la seconde Equation, $yy \backsim ax + bb$, supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB ∽ x, & que de son extremité B, il parte la Ligne indeterminée BE ∽ y, en sorte que l'angle ABE soit donné. Puisque le Quarré yy de la Ligne BE ∽ y, est égal au Rectangle $ax + bb$, dont les côtez sont a, $x + \frac{bb}{a}$, on la doit considerer comme l'ordonnée dans une Parabole, & le côté $x + \frac{bb}{a}$ comme la partie du Diametre entre le sommet & l'ordonnée, & par conséquent l'autre côté a comme le Parametre. Mais pour avoir la partie $x + \frac{bb}{a}$, il faut ajoûter à la Ligne AB ∽ x, la Ligne AC ∽ $\frac{bb}{a}$.

Troisiéme Equation. 23 Fig. Pour construire le Lieu de la troisiéme Equation, $yy \backsim ax - bb$, on fera une construction semblable à la precedente, excepté qu'au lieu de prendre AC ∽ $\frac{bb}{a}$, sur la Ligne AB, prolongée vers A, il la faut prendre sur la même Ligne AB, depuis A vers B, pour avoir BC ∽ $x - \frac{bb}{a}$, à cause de $yy \backsim ax - bb$.

Digitized by Google

Pour construire le Lieu de la quatriéme Equation, $yy \backsim bb - ax$, on fera une construction tout-à-fait semblable à la precedente, mais il faut concevoir AG plus grande que AB, à cause de $yy \backsim bb - ax$. Quatriéme Equation. 24. Fig.

Nous avons dit que tous les Lieux à la Parabole peuvent être reduits à l'une des quatre formules precedentes, & pour vous le faire voir, nous ajoûterons icy les exemples suivans.

Proposons ce Lieu à la Parabole, $yy + ay \backsim bx - \frac{1}{4}aa$. Il en faut premierement ôter le second terme, en supposant $y \backsim z - \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim bx$, qui est de même forme que le premier des quatre precedens. Premier Exemple.

C'est pourquoy supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie $AB \backsim x$, & que de son extremité B, il parte la Ligne indeterminée $BE \backsim y$, en sorte que l'angle ABE, soit donné. Il faut ajoûter à la Ligne $BE \backsim y$, la Ligne $BD \backsim \frac{1}{2}a$, pour avoir $DE \backsim z$, à cause de $y - \backsim z - \frac{1}{2}a$: mais comme le point B, n'est pas déterminé, tirez du point fixe A, à la Ligne BE, la parallele $AC \backsim \frac{1}{2}a$, & du point C, à la Ligne AB, la parallele CD, car ainsi en quelque Lieu que soit la Ligne BE, on aura toûjours $ED \backsim z$: & comme son Quarré zz est égal au Rectangle bx, on connoît aisément qu'il faut décrire par le point C, sur le Diametre CD, une Parabole, dont le Parametre $CF \backsim b$, & dont les ordonnées soient paralleles à la Ligne BE, & cette Parabole ainsi décrite sera le Lieu qu'on cherche. Construction. 25. Fig.

Proposons ce Lieu à la Parabole, $yy - ay \backsim bx + cc$. Il en faut premierement ôter le second terme, en sup- Deuxiéme Exemple.

posant $y \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim bx + cc + \frac{1}{4}aa$, qui est de même forme que le second des quatre precedens, duquel par consequent on tirera aisément une construction, sur
26. Fig. tout en regardant les noms de chaque Ligne, qui sont icy écris par ordre.

$AB \backsim x.$
$BE \backsim y.$
$DE \backsim z.$
$AC \backsim \frac{1}{2}a.$
$CF \backsim b.$
$CG \backsim \frac{cc}{b} + \frac{aa}{4b}.$

Troisiéme Exemple. Proposons ce Lieu à la Parabole, $\overline{yy} - a\overline{y} \backsim bx + \frac{1}{2}a\overline{a}$. Il en faut premierement ôter le second terme, en supposant $y \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim bx - \frac{1}{4}aa$, qui est de même forme que le troisiéme des quatre precedens, duquel par consequent il sera aisé de tirer une *construction*, en
27. Fig. considerant la valeur de chaque Ligne, que nous avons icy marquée par ordre.

$AB \backsim x.$
$BE \backsim y.$
$DE \backsim z.$
$AC \backsim \frac{1}{2}a.$
$CF \backsim b.$
$CG \backsim \frac{aa}{4b}.$

Quatriéme Exemple. Proposons ce Lieu à la Parabole, $\overline{yy} - a\overline{y} \backsim cc - b\overline{x}$. Il en faut premierement ôter le second terme en supposant $y \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim \frac{1}{4}aa + cc - bx$, qui est de même forme que le dernier des quatre precedens, duquel par

par conſequent on tirera aiſément une conſtruction, par la valeur des Lignes, que vous voyez icy. 28. Fig.

$AB \backsim x.$
$BE \backsim y.$
$DE \backsim z.$
$AC \backsim \frac{1}{2}a.$
$FG \backsim b.$
$CF \backsim \frac{aa}{4b} \dagger \frac{cc}{b}.$

Propoſons ce Lieu à la Parabole, $yy - \frac{2xy}{b} \backsim cx - \frac{2xx}{4bb}$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $y \backsim z \dagger \frac{ax}{2b}$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz \backsim cx$, qui eſt ſemblable à la premiere des quatre formules precedentes. Cinquiéme Exemple.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie $AB \backsim x$, & que de ſon extremité B, il parte la Ligne indeterminée $BE \backsim y$, en ſorte que l'angle ABE, ſoit donné. Il faut ôter de la Ligne $BE \backsim y$, la Ligne $BC \backsim \frac{ax}{2b}$, pour avoir $EC \backsim z$, à cauſe de $y \backsim z \dagger \frac{ax}{2b}$: mais comme le point B, n'eſt pas déterminé, faites $AD \backsim b$, & par le point D, tirez à la Ligne BE, la parallele $DF \backsim a$, car menant la droite AF, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle rencontre en C, la Ligne BE, en quelque Lieu que ſoit cette Ligne BE, on aura toûjours $BC \backsim \frac{ax}{2b}$, & conſequemment $EC \backsim z$, à cauſe des Triangles ſemblables ABC, ADF. Et parce que dans le Triangle ADF, on connoît les deux côtez AD, DF, & l'angle compris ADF, le troiſiéme AF, ſera auſſi connu, & ſi on le nomme r, on trouvera $AC \backsim \frac{rx}{2b}$; Ainſi les deux quantitez indeterminées x, z, du Lieu reduit $zz \backsim cx$, ſeront repreſentées par les deux Lignes AB, CE, & Conſtruction. 29. Fig.

29. Fig. comme leurs extremitez ne ſe joignent pas, on prendra AC pour AB, ou $\frac{x}{2b}$ pour x. Or comme le Quarré de CE, ou zz, eſt la premiere partie du Lieu reduit $zz \backsim cx$, on connoît quelle eſt l'ordonnée dans la Parabole qu'on cherche, dont le Parametre ſeroit c, ſi la partie du Diametre entre le ſommet & l'ordonnée étoit x, mais comme elle eſt $\frac{x}{2b}$, ou AC, au lieu de c pour Parametre, on aura $\frac{bc}{r}$, qu'on trouvera en diviſant c par $\frac{r}{2b}$: Si donc on décrit par le point A, ſur le Diametre AC, une Parabole, dont le Parametre AG $\backsim \frac{2bc}{r}$, & dont les ordonnées ſoient paralleles à la Ligne BE, cette Parabole ainſi décrite ſera le Lieu qu'on cherche.

Demonſtration. Car ſi l'on prend ſur la circonference de cette Parabole un point à volonté, comme E, & qu'on en tire ſur le Diametre AC, l'ordonnée CE: comme nous avons fait AD $\backsim 2b$, DF $\backsim a$, AF $\backsim r$, & le Parametre AG $\backsim \frac{2bc}{r}$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & $BE \backsim y$, on aura AC $\backsim \frac{x}{2b}$, BC $\backsim \frac{ax}{2b}$, & $CE \backsim y - \frac{ax}{2b}$, dont le Quarré étant égal au Rectangle GAC, par la nature de la Parabole, on aura cette Equation, $yy - \frac{axf}{2b} + \frac{aaxx}{4bb} \backsim cx$, ou $yy - \frac{axy}{b} \backsim cx - \frac{aaxx}{4bb}$, qui eſt la même que la propoſée.

La raiſon pourquoy il faut diviſer c par $\frac{r}{2b}$, pour avoir le Parametre de la Parabole, eſt telle. Puiſque le Rectangle GAC, ou $\frac{rxw}{2b}$, en ſuppoſant le Parametre AG $\backsim w$, eſt égal au Quarré zz de l'ordonnée EC $\backsim z$, & que ce même Quarré zz eſt égal au Rectangle cx, on aura cette Equation, $\frac{rxw}{2b} \backsim cx$, dans laquelle on trouvera $w \backsim \frac{2bc}{r}$, pour le Parametre AG.

Sixiéme Exemple. Propoſons encore ce Lieu à la Parabole, $yy + \frac{axy}{b} +$

$dy \backsim cc - \frac{aaxx}{4bb}$. Il en faut premierement ôter le second terme, en supposant $y \backsim z - \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}d$, pour avoir cet autre Lieu sans second terme, $zz \backsim cc + \frac{1}{4}dd + \frac{adx}{2b}$, & si l'on suppose $cc + \frac{1}{4}dd \backsim ff$, & $\frac{ad}{2b} \backsim m$, on aura cet autre Lieu, $zz \backsim ff + mx$, qui est semblable à la seconde des quatre formules precedentes.

C'est pourquoy supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de son extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Il faut ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BD $\backsim \frac{1}{2}d$, & la Ligne DH $\backsim \frac{ax}{2b}$ pour avoir EH $\backsim z$, à cause de $y \backsim z - \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}d$. Mais comme le point B n'est pas déterminé, tirez par le point A à la Ligne BE, la parallele AC $\backsim \frac{1}{2}d$, & par le point C, à la Ligne AB, la Parallele CF $\backsim 2b$. Enfin tirez du point F à la Ligne BE, la parallele FG $\backsim a$, car menant la droite CG, & la prolongeant jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, aussi prolongée en H, en quelque Lieu que soit cette Ligne BE, on aura toûjours DH $\backsim \frac{ax}{2b}$, à cause des Triangles semblables CFG, CDH, & consequemment EH $\backsim z$, dont le Quarré zz étant égal au Rectangle $ff + mx$, dont les côtez sont m, $\frac{ff}{m} + x$, on connoît que le Parametre doit être m, & que la partie du Diametre entre le sommet & l'ordonnée devroit être $\frac{ff}{m} + x$, qu'on trouvera en ajoûtant à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AI $\backsim \frac{ff}{m}$, pour avoir BI $\backsim \frac{ff}{m} + x$, qui ne peut pas être cette partie interceptée, parce que la Ligne BE n'est pas l'ordonnée, ou z, car c'est EH. Il faut donc que cette partie interceptée soit sur la Ligne CH, afin qu'elle soit correspondante à l'ordonnée EH : mais comme

Construction. 30. Fig.

Digitized by Google

30. Fig. elle doit auſſi avoir un raport avec la Ligne BI, on tirera du point I, à l'ordonnée EH, la parallele IK, laquelle rencontrant la Ligne CH, prolongée en K, donnera le point K, pour le ſommet de la Parabole, & KH, pour la partie du Diametre entre le ſommet & l'ordonnée. Il n'y a donc plus qu'à déterminer la longueur du Parametre, & la valeur de la partie KH, ce que nous ferons ainſi.

Puiſque dans le Triangle CFG, on connoît les deux côtez CF, FG, & l'angle compris CFG, le troiſiéme côté CG ſera auſſi connu, & ſi on le nomme r, on trouvera CH $\backsim \frac{rx}{2b}$, & CK $\backsim \frac{ffr}{2bm}$, & conſequemment KH $\backsim \frac{ffr}{2bm} + \frac{rx}{2b}$, pour la partie interceptée. Or ſi cette partie interceptée êtoit $\frac{ff}{m} + x$, ou BI, le Parametre ſeroit m, comme vous avez vû. C'eſt pourquoy le Parametre doit changer, & pour le trouver, on le nommera ω, & parce que le Rectangle ſous le Parametre KL, & la partie interceptée KH, ſçavoir $\frac{ffr\omega}{2bm} + \frac{rx\omega}{2b}$, eſt égal au Quarré zz, de l'ordonnée EH $\backsim z$, & que ce même Quarré zz eſt égal à $ff + mx$, on aura cette Equation, $\frac{ffr\omega}{2bm} + \frac{rx\omega}{2b} \backsim ff + mx$, dans laquelle on trouvera $\frac{2bm}{r} \backsim \omega$, pour le Parametre KL. Si donc on décrit par le point K, ſur le Diametre KH, une Parabole, dont le Parametre KL $\backsim \frac{2bm}{r}$, & dont les ordonnées ſoient paralleles à la Ligne EH, cette Parabole ainſi décrite ſera le Lieu qu'on cherche.

Digitized by Google

PROBLEME V.

Conſtruire un Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

Les Equations qui donnent des Lieux à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, ſe peuvent toutes reduire à une de même forme que la ſuivante, $xy \backsim ab$, dont la conſtruction eſt telle.

Conſtruction. 31. Fig.

Suppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Tirez du point fixe A, à la Ligne BE, la parallele AC égale à l'une des deux quantitez connuës a, b, du Rectangle ab, comme à la premiere a, & par le point C, à la Ligne AB, la parallele CD, égale à l'autre quantité connuë b; Aprés cela décrivez du centre A, par le point D, entre les Aſymptotes AB, AC, une Hyperbole, qui ſera le Lieu qu'on cherche.

Demonſtration.

Car ſi on prend ſur la circonference de cette Hyperbole un point à volonté, comme E, & que l'on en tire à l'une des Aſymptotes AB, AC, comme à AC, la parallele EB; comme nous avons fait AC $\backsim a$, & CD $\backsim b$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on conſiderera que puiſque le Rectangle ACD eſt égal au Rectangle ABE, par la nature des Aſymptotes, on aura cette Equation, $ab \backsim xy$, qui eſt la même que la propoſée.

Pour vous faire voir que toutes les Equations à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes ſe peuvent reduire

à une de même forme que la precedente, nous ajoûterons icy les Exemples ſuivans.

Premier Exemple. Propoſons donc premierement ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab \backsim \frac{cxy}{d} \dagger my$. On diviſera en premier lieu, l'Equation propoſée par $\frac{c}{1}$, pour avoir cette autre Equation, $\frac{abd}{c} \backsim xy \dagger \frac{dmy}{c}$, où le Rectangle xy des deux lettres inconnuës ſe trouve reduit à l'unité, ce qui doit toûjours être ainſi, autrement le Lieu propoſé ſeroit mal reſolu. Suppoſez $x \dagger \frac{dm}{c} \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $\frac{abd}{c} \backsim yz$, & ſi vous ſuppoſez $\frac{abd}{c} \backsim nd$, on aura ce dernier Lieu $nd \backsim yz$, qui eſt de même forme que le precedent.

Conſtruction. C'eſt pourquoy ſuppoſons que du pointfixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indefinie BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim \frac{dm}{c}$, pour avoir BC $\backsim z$, à cauſe de $x \dagger \frac{dm}{c} \backsim z$. Tirez par le point C à la Ligne BE, *la parallele* CD $\backsim x$, & par le point D, à *la* Ligne BC, la parallele DF $\backsim d$, & décrivez du centre ϵ, par le point F, entre les Aſymptotes CB, CD, une Hyperbole, qui ſera le Lieu qu'on cherche, & la démonſtration s'en fera comme auparavant.

34. Fig.

Deuxiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes *Aſymptotes*, $ab \backsim \frac{cxy}{d} - my$. Diviſez-le par $\frac{c}{d}$, pour avoir cet autre Lieu, $\frac{abd}{c} \backsim xy - \frac{dmy}{c}$, dans lequel ſuppoſant $x - \frac{dm}{c} \backsim z$, il viendra cet autre Lieu $\frac{abd}{c} \backsim yz$, & ſi l'on ſuppoſe $\frac{abd}{c} \backsim dn$, on aura ce dernier Lieu reduit $dn \backsim yz$, qui êtant de même forme que le precedent, on en tirera aiſément une conſtruction, par les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez.

33. Fig.

Digitized by Google

AB ∽ x. 33. Fig.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
AC ∽ $\frac{dm}{c}$.
DF ∽ d.
CD ∽ n.

Troiſiéme Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab \backsim my - \frac{cxv}{a}$, ou $\frac{abd}{c} \backsim \frac{dmy}{c} - xy$. Suppoſez $\frac{dm}{c} - x \backsim z$, ou $\frac{abd}{c} \backsim dn$, pour avoir cet autre Lieu reduit $dn \backsim yz$, d'où l'on tirera aiſément une conſtruction à l'imitation de la precedente, en conſiderant les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez. 34. Fig.

AB ∽ x.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
AC ∽ $\frac{dm}{c}$.
DF ∽ d.
CD ∽ n.

Quatriéme Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ax \backsim xy - by$. Suppoſez premierement $x - b \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $yz - az \backsim ab$. Suppoſez encore $y - a \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab \backsim z\omega$, duquel on tirera aiſément une conſtruction par les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez. 35. Fig.

AB ∽ x.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
EF ∽ ω.
AC ∽ b ∽ DG
GH ∽ a ∽ CD.

Digitized by Google

35. Fig.

CG ∽ $a + b$.

BF ∽ a.

Cinquiéme Exemple. Proposons ce Lieu à l'Hyperbole entre ses Asymptotes, $ax \backsim xy + by$. Supposez premierement $x + b \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $az - ab \backsim yz$, ou $ab \backsim az - yz$. Supposez encore $a - y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab \backsim z\omega$, duquel on tirera aisément

36. Fig. une construction, par la valeur de chaque Ligne, que nous avons icy ajoûtée.

AB ∽ x.

BE ∽ y.

BC ∽ z.

EF ∽ ω.

CD ∽ a.

AC ∽ b.

DF ∽ $b + x$.

BC ∽ $b + x$.

Sixiéme Exemple. Proposons ce Lieu à l'Hyperbole entre ses Asymptotes, $ax \backsim by - xy$. Supposez premierement $b - x \backsim z$, pour avoir cet autre Lieu, $ab \backsim az + yz$. Supposez encore $a + y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit,

37. Fig. $ab \backsim z\omega$, duquel on tirera aisément une construction, par les noms de chaque Ligne, qui ont été icy marquez.

AB ∽ x.

BE ∽ y.

BC ∽ z.

EF ∽ ω.

AC ∽ b ∽ DG.

GH ∽ a ∽ CD.

CG ∽ $b - a$.

DF ∽ z.

Proposons

Septiém: Exemple.

Proposons ce Lieu à l'Hyperbole entre ses Asymptotes, $ab - xx \backsim xy + cy$. Supposez premierement $x + c \backsim z$, ou $x \backsim z - c$, pour avoir cet autre Lieu, $ab - cc \backsim zz - 2cz + yz$. Supposez encore $z - 2c + y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab - cc \backsim z\omega$, ou $dd \backsim z\omega$, en supposant $ab - cc \backsim dd$.

Construction. 38. Fig.

Pour la construction, supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de son extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim c$, pour avoir BC $\backsim z$, à cause de $x + c \backsim z$. Il faut aussi ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BG $\backsim z - 2c$, pour avoir EG $\backsim \omega$, à cause de $z - 2c + y \backsim \omega$: mais comme le point B n'est pas déterminé, faites CF $\backsim 2c$, & tirez par le point C, à la Ligne BE, la parallele CD $\backsim 2c$, car menant la droite DF, & la prolongeant jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, aussi prolongée en G, en quelque Lieu que soit cette Ligne BE, on aura toûjours BG $\backsim z - 2c$, à cause des deux Triangles isosceles semblables CFD, BFG, & par consequent EG $\backsim \omega$. Ainsi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $dd \backsim z\omega$, seront representées par les deux Lignes CB, EG, & comme leurs extremitez ne se joignent pas, à la place de BC $\backsim z$, on prendra son égale & parallele EK: & parce que le Rectangle KEG, ou $z\omega$, est égal au Rectangle dd, dont les côtez sont d, d, on tirera du point D, à la Ligne KE, la parallele DH $\backsim d$, & on décrira du centre D, par le point H, entre les Asymptotes DL, DG, une Hyperbole qui sera le Lieu qu'on cherche.

Digitized by Google

Demonstration. 38. Fig. Car si l'on prend sur la circonference de cette Hyperbole un point à discretion, comme E, & que l'on tire à l'une des Asymptotes, la parallele BE & par le point H, la parallele HI; comme nous avons fait AC ∽ c, CD ∽ $2c$, CF ∽ $2c$, & DH ∽ d ∽ HI, si l'on suppose AB ∽ x, & BE ∽ y, on aura CR ou KE ∽ $x+c$, & BF ou BG ∽ $x-c$, & par consequent EG ∽ $x-c+y$, & parceque le Rectangle KEG est égal au Rectangle DHI, par la proprieté des Asymptotes, on aura cette Equation, $xx+cy+xy-cc \backsim ab-cc$, ou $ab-xx \backsim xy+cy$, qui est la même que la proposée.

Huitiéme Exemple. Proposons encore ce Lieu à l'Hyperbole entre ses Asymptotes, $ax-xx \backsim ab-xy-cy$. Supposez premierement $x+c \backsim z$, ou $x \backsim z-c$, pour avoir cet autre Lieu, $az-ac-zz+2cz-cc \backsim ab-yz$, ou $ab+ac+cc \backsim az-zz+2cz+yz$. Supposez encore $a-z+2c+y \backsim \omega$, pour avoir ce dernier Lieu reduit, $ab+ac+cc \backsim z\omega$, ou $dd \backsim z\omega$, en supposant $ab+ac+cc \backsim dd$. D'où l'on tirera aisément une construction à l'imitation de la 39. Fig. precedente. C'est pourquoy je me contenteray de vous donner icy les noms de chaque Ligne.

AB ∽ x.
BE ∽ y.
BC ∽ z.
EG ∽ ω.
AC ∽ c.
DH ∽ d.
CD ∽ $2c+a \backsim$ CF.
BG ∽ $2c+a-z$.
KE ∽ $x+c$.
BG ∽ $a+c-x$.

Digitized by Google

$EG \backsim a + c - x + y.$

$d \backsim R.ab + ac + cc.$

39. Fig.

Les Equations de ces deux derniers exemples appartiennent aussi à une Hyperbole par son Parametre, comme vous allez voir dans le Probleme suivant.

PROBLEME VI.

Construire un Lieu à l'Hyperbole par son Parametre.

Les Lieux à l'Hyperbole par son Parametre se peuvent tous reduire à l'une des deux formules suivantes.

$$xx - aa \backsim yy.$$

$$xx - aa \backsim \frac{byy}{c}.$$

Pour construire le Lieu de la premiere Equation, $xx - aa \backsim yy$, lequel est une Hyperbole Equilatere, comme vous allez voir, supposons que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée $AB \backsim x$, & de son extremité B, la Ligne indefinie $BE \backsim y$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Puisque le Quarré yy de la Ligne $BE \backsim y$, est égal au Rectangle $xx - aa$, dont les côtez sont $x + a$, $x - a$, on doit considerer cette Ligne BE comme une ordonnée dans l'Hyperbole, & les côtez $x + a$, $x - a$, doivent être sur le Diametre de la même Hyperbole. Ainsi on doit considerer la Ligne $AB \backsim x$, comme une partie de ce Diametre prolongé autant qu'il en sera besoin, & à cause des côtez $x + a$, $x - a$, on luy doit ajoûter d'une part la Ligne $AD \backsim a$, & de l'autre côté en ôter la Ligne $AC \backsim a$, pour avoir $DB \backsim x + a$, & $BC \backsim x - a$, dont le Rectangle DBC, ou $xx - aa$, estant égal au Quarré

Premiere Equation.

40. Fig.

40. Fig. yy de la Ligne BE $\backsim y$, on connoît que CD ou $2a$ eſt le Diametre déterminé d'une Hyperbole Equilatere, & que par conſequent le point A en eſt le centre, & C le ſommet.

Si donc on décrit du centre A, par le point C, une Hyperbole, dont le Diametre déterminé CD $\backsim 2a$, ſoit égal à ſon Parametre, & dont les ordonnées ſoient paralleles à la Ligne BE, cette Hyperbole ainſi décrite ſera le Lieu de l'Equation propoſée $xx-aa \backsim yy$.

Demonſtration. Car ſi on prend ſur la circonference de cette Hyperbole un point à volonté, comme E, & qu'on en tire ſur le diametre CB, l'ordonnée BE; comme nous avons fait AC $\backsim a$, & AD $\backsim a$, ſi l'on ſuppoſe AB $\backsim x$, & BE $\backsim y$, on aura DB $\backsim x+a$, & BC $\backsim x-a$, & parce que le Rectangle DBC, eſt égal au Quarré de l'ordonnée BE, par la nature de l'Hyperbole Equilatere, on aura cette Equation, $xx-aa \backsim yy$, qui eſt la même que la propoſée.

Deuxiéme Equation. Pour conſtruire le Lieu de la ſeconde Equation, $xx-aa \backsim \frac{byy}{c}$, on en tirera premierement cette analogie, $b, c :: xx-aa, yy$, qui fait connoître, que ce Lieu eſt à une Hyperbole Scalene, dont le Diametre déterminé eſt à ſon Parametre, comme b, à c, aprés quoy on trouvera aiſément une conſtruction à l'imitation de la precedente, en conſiderant les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez. 41. Fig.

AB $\backsim x$.
BE $\backsim y$.
AC $\backsim a$.
CD $\backsim 2a$.

Digitized by Google

$BD \backsim x + a$. 42. Fig.

$BC \backsim x - a$.

Diam. Param. :: b, c.

$2a$. $\frac{2ac}{b}$.

Pour vous faire voir que toutes les Equations qui donnent des Lieux à l'Hyperbole par ſon Parametre, ſe peuvent reduire à l'une des deux precedentes, nous ajoûterons icy les Exemples ſuivans.

Premier Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx + ax \backsim yy$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}a$, pour avoir cette autre Equation ſans ſecond terme, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim yy$, qui eſt de même forme que la premiere des deux precedentes.

Conſtruction. 42. Fig.

C'eſt pourquoy ſuppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie $AB \backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indeterminée $BE \backsim y$, en ſorte que l'angle ABE, ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne $AB \backsim x$, la Ligne $AC \backsim \frac{1}{2}a$, pour avoir $CB \backsim z$, à cauſe de $x + \frac{1}{2}a \backsim z$: & parce que dans le Lieu reduit, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim yy$, le Quarré yy de la Ligne $BE \backsim y$, eſt égal au Rectangle $zz - \frac{1}{4}aa$, dont les côtez ſont $z + \frac{1}{2}a$, $z - \frac{1}{2}a$, dont $z - \frac{1}{2}a$, eſt repreſenté par la Ligne $AB \backsim x$, on aura l'autre côté $z + \frac{1}{2}a$, en ajoûtant à la Ligne $BC \backsim z$, la Ligne $CD \backsim \frac{1}{2}a$, aprés quoy le reſte ſera facile à achever.

Deuxiéme Exemple.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx - ax \backsim yy$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim yy$, qui eſt de même forme que la premiere des deux formules

precedentes. C'eſt pourquoy on en tirera aiſément
43. Fig. une conſtruction, en conſiderant les noms de chaque Ligne, qui ſont icy marquez.

$AB \backsim x.$
$BE \backsim y.$
$BC \backsim z.$
$AC \backsim \frac{1}{2}a \backsim CD.$
$BC \backsim x - \frac{1}{2}a.$
$BD \backsim x - a.$
$Diam. \backsim Param.$
$a \qquad a$

Troiſiéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx - ax \backsim \frac{byy}{c}$. Il en faut premierement ôter le
44. Fig. ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim \frac{byy}{c}$, qui eſt ſemblable à la derniere des deux formules precedentes, ce qui fait connoître que le Lieu propoſé $xx - ax \backsim \frac{byy}{c}$, eſt à une Hyperbole, dont le Diametre déterminé eſt à ſon Parametre comme b à c, à cauſe de la fraction $\frac{byy}{c}$. Aprés quoy la conſtruction ſera tout-à-fait la même que la precedente.

Quatriéme Exemple. Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx + ax \backsim \frac{byy}{c}$. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}a$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz - \frac{1}{4}aa \backsim \frac{byy}{c}$, qui étant ſemblable à la derniere des deux formules precedentes, fait connoître que le Lieu propoſé $xx + ax \backsim \frac{byy}{c}$, eſt à une Hyperbole, dont le Diametre
45. Fig. eſt à ſon Parametre comme b à c, aprés quoy la conſtruction ſera tout-à-fait la même que celle du premier Exemple.

Digitized by Google

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx + ax \backsim yy + by$. Il en faut premierement ôter les ſeconds termes, en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}a$, & $y \backsim \omega - \frac{1}{2}b$, pour avoir cet autre Lieu ſans ſecond terme, $zz + \frac{bb-aa}{4} \backsim \omega\omega$, ou $zz - \frac{1}{4}dd \backsim \omega\omega$, en ſuppoſant $bb - aa \backsim -dd$. D'où nous avons tiré cette conſtruction. Cinquiéme Exemple. 45. Fig.

Suppoſons que du point fixe A, il parte la Ligne indefinie AB $\backsim x$, & de ſon extremité B, la Ligne indeterminée BE $\backsim y$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne AB $\backsim x$, la Ligne AC $\backsim \frac{1}{2}a$, pour avoir BC $\backsim z$, à cauſe de $x \backsim z - \frac{1}{2}a$. Mais il faut ajoûter à la Ligne BE $\backsim y$, la Ligne BF $\backsim \frac{1}{2}b$, pour avoir EF $\backsim \omega$, à cauſe de $y \backsim \omega - \frac{1}{2}b$. Mais comme le point B n'eſt pas determiné, tirez du point C, à la Ligne BE, la parallele CD $\backsim \frac{1}{2}b$, & du point D, à la Ligne AB, la Parallele DF $\backsim z$, car ainſi vous aurez EF $\backsim \omega$. Ainſi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $zz - \frac{1}{4}dd \backsim \omega\omega$, ſeront repreſentées par les deux Lignes DF, EF: aprés quoy le reſte ſera facile à achever. Conſtruction. 46. Fig.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole par ſon Parametre, $xx - ax \backsim yy - by$. Si on ôte les ſeconds termes, en ſuppoſant $x \backsim z + \frac{1}{2}a$, & $y \backsim \omega + \frac{1}{2}b$, on trouvera aiſément une conſtruction à l'imitation de la precedente, & il ne faut que regarder la Figure pour la comprendre. Sixiéme Exemple. 48. Fig.

Propoſons ce Lieu à l'Hyperbole, $ab - xx \backsim xy + cy$, ou $xx + xy \backsim ab - cy$, qui eſt le même que celuy que nous avons propoſé au ſeptiéme Exemple du Probleme precedent. Il en faut premierement ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \backsim z - \frac{1}{2}y$, pour avoir cet autre Septiéme Exemple.

48. Fig. Lieu, $zz - \frac{1}{4}yy \backsim ab - cy$, ou $yy - 4cy \backsim 4zz - 4ab$, d'où il faut encore ôter le second terme, en ſuppoſant $y \backsim \omega + 2c$, pour avoir ce dernier Lieu, $\omega\omega - 4cc + 4ab \backsim 4zz$, ou $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, en ſuppoſant $4ab - 4cc \backsim -dd$.

Conſtruction. 47. Fig. Pour la conſtruction, ſuppoſez que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée AB $\backsim y$, & de ſon extremité B, la Ligne indefinie BE $\backsim x$, en ſorte que l'angle ABE ſoit donné. Il faut ajoûter à la Ligne BE $\backsim x$, la Ligne BF $\backsim \frac{1}{2}y$, pour avoir EF $\backsim z$, à cauſe de $x \backsim z - \frac{1}{2}y$: mais comme le point B n'eſt pas déterminé, prolongez comme vous voudrez la Ligne AB en C, & tirez par le point C, à la Ligne BE, la parallele CD, égale à la moitié de AC, car menant la droite AD, & la prolongeant juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, auſſi prolongée en F, on aura BF $\backsim y$, à cauſe des Triangles ſemblables ACD, ABF, & conſequemment EF $\backsim z$. Il faut encore ôter de la Ligne AB $\backsim y$, la Ligne AG $\backsim 2c$, pour avoir GB $\backsim \omega$, à cauſe de $y \backsim \omega + 2c$. Ainſi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, ſeront repreſentées par les deux Lignes EF, GB : mais comme leurs extremitez ne ſe joignent pas, on tirera du point G, à la Ligne BE, la parallele GH, & on prendra FH, pour GB, c'eſt-à-dire $\frac{n\omega}{m}$ pour ω ; car ſi l'on ſuppoſe AC $\backsim m$, & AD $\backsim n$, on trouvera HF $\backsim \frac{n\omega}{m}$. Puiſque donc on change ω en $\frac{n\omega}{m}$, il faut auſſi changer le Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, en celuy-cy, $\frac{nn\omega\omega}{mm} - \frac{ddnn}{mm} \backsim \frac{4nnzz}{mm}$ d'où l'on tire cette analogie, $4nn$, $mm :: \frac{nn\omega\omega - ddnn}{mm}$, zz, qui fait connoître que le Lieu propoſé $ab - xx \backsim xy + cy$, eſt à une Hyperbole, dont le Diametre

metre eſt à ſon Parametre, comme $4nn$ à mm; Aprés quoy le reſte s'achevera facilement, en regardant les noms de chaque Ligne, que nons avons icy ajoûtez. 47. Fig.

AB ∽ y.
BE ∽ x.
EF ∽ z.
BG ∽ ω.
AC ∽ m.
CD ∽ $\frac{1}{2}m$.
EF ∽ $\frac{1}{2}y$.
AG ∽ $2c$.
AD ∽ n.
HF ∽ $\frac{n\omega}{m}$.
HI ∽ $\frac{dn}{m}$ ∽ HK.
KI ∽ $\frac{2dn}{m}$.

Diam. Param. :: $4nn$, mm.
$\frac{2dn}{m}$. $\frac{dm}{2n}$.

Nous avons ſuppoſé $4cc$ plus grand que $4ab$, & s'il avoit été moindre, le Lieu reduit ſeroit tel, $\omega\omega + dd$ ∽ $4zz$, ou $4zz - dd$ ∽ $\omega\omega$, dont la conſtruction eſt ſemblable à la precedente, excepté que le Diametre de l'Hyperbole eſt ſur la Ligne GH, & que le Diametre traverſant eſt à ſon Parametre, comme mm à $4nn$, car ſi on multiplie le Lieu reduit $4zz - dd$ ∽ $\omega\omega$, par $\frac{nn}{mm}$, comme il a été fait auparavant, on aura cet autre Lieu, $\frac{4nnzz}{mm} - \frac{ddnn}{mm}$ ∽ $\frac{nn\omega\omega}{mm}$, d'où l'on tire cette analogie mm, $4nn$ :: $zz - \frac{1}{4}dd$, $\frac{nn\omega\omega}{mm}$, qui fait connoître que le Diametre eſt à ſon Parametre, comme mm à $4nn$, & que le demy Diametre eſt R $\frac{1}{4}dd$, ou $\frac{1}{2}d$, & enfin que R $\frac{nn\omega\omega}{mm}$, ou $\frac{n\omega}{m}$, ou EM eſt une ordonnée dans l'Hyperbole, &c. Voyez les noms de chaque Ligne. 49. Fig.

Digitized by Google

49. Fig.

$AB \backsim y.$
$BE \backsim x.$
$EF \backsim z.$
$BG \backsim \omega.$
$AC \backsim m.$
$CD \backsim \frac{1}{2}m.$
$BF \backsim \frac{1}{2}y.$
$AG \backsim 2c.$
$AD \backsim n.$
$KM \backsim z + \frac{1}{2}d.$
$IM \backsim z - \frac{1}{2}d.$
$HI \backsim \frac{1}{2}d \backsim HK.$

Diam. Param. :: mm , $4nn$.
$d.$ $\frac{4dnn}{mm}$.

Huitiéme Exemple.

Proposons encore ce Lieu à l'Hyperbole, $ax - xx \backsim ab - xy - cy$, ou $xx - ax - xy \backsim cy - ab$, qui est la même que celle que nous avons proposée au huitiéme Exemple du Probleme precedent. Il en faut premierement ôter le second terme, en supposant $x \backsim z + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$, pour avoir cet autre Lieu, $zz - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{4}yy \backsim cy - ab$, ou $yy + 2ay + 4cy \backsim 4ab - aa + 4zz$, d'où il faut encore ôter le second terme, en supposant $y \backsim \omega - a - 2c$, pour avoir ce dernier Lieu, $\omega\omega - 4ab - 4ac - 4cc \backsim 4zz$, ou $\omega\omega - dd \backsim 4zz$, en supposant $4ab + 4ac + 4cc \backsim dd$.

Construction. 50. Fig.

Pour la construction, supposez que du point fixe A, il parte la Ligne indeterminée $AB \backsim y$, & de son extremité B, la Ligne indefinie $BE \backsim x$, en sorte que l'angle ABE soit donné. Il faut ôter de la Ligne $BE \backsim x$, la Ligne $BH \backsim \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$, pour avoir $EH \backsim z$, à cause de $x \backsim z + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$: Mais comme le point B, n'est

Digitized by Google

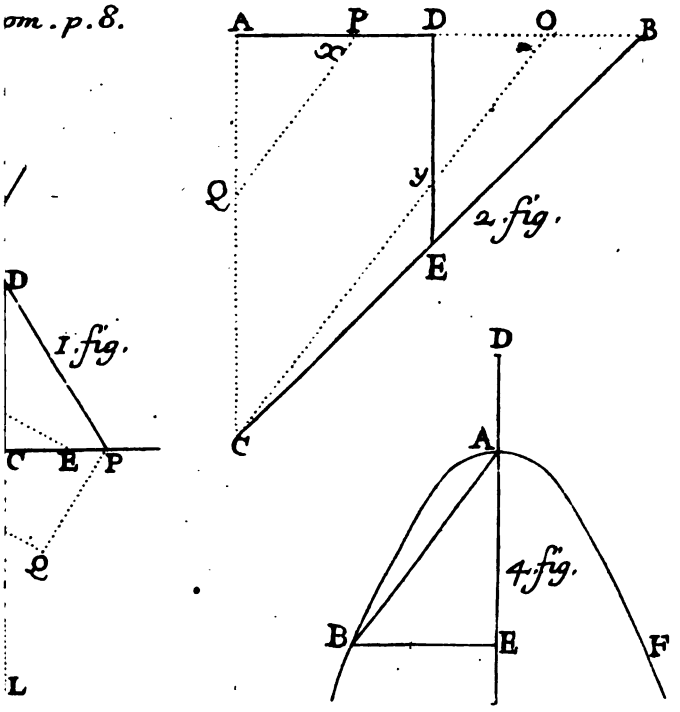
pas déterminé, tirez du point A, à la Ligne BE, la parallele AC ∽ $\frac{1}{2}a$, & du point C, à la Ligne AB, la parallele CD, qui donnera BD ∽ $\frac{1}{2}a$; & pour avoir DH ∽ $\frac{1}{2}y$, prenez sur CD, une Ligne quelconque CF ∽ m, & tirez par le point F, à la Ligne BE, la parallele FG ∽ $\frac{1}{2}m$, car menant la droite CG, & la prolongeant jusqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne BE, en H, vous aurez DH ∽ $\frac{1}{2}y$, à cause des Triangles semblables CFG, CDH, & par consequent DH ∽ $\frac{1}{2}a \dagger \frac{1}{2}y$, & EH ∽ z. Il faut ajoûter à la Ligne AB, ou CD ∽ y, la Ligne CI ∽ $a \dagger 2c$, pour avoir ID ∽ ω, à cause de $y \backsim \omega - a - 2c$. Ainsi les deux quantitez indeterminées z, ω, du Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim zz$, seront representées par les deux Lignes, EH, ID; & comme leurs extremitez ne se joignent pas, on tirera du point I, à la Ligne BE, la parallele IK, qui rencontrera la Ligne CH, au point K, qui sera le centre de l'Hyperbole, parce que l'on doit changer la Ligne ID ∽ ω en la Ligne KH ∽ $\frac{n\omega}{m}$, & par consequent le Lieu reduit $\omega\omega - dd \backsim zz$, en celuy-cy $\frac{nn\omega\omega}{mm} - \frac{ddnn}{mm} \backsim \frac{nnzz}{mm}$, & achever le reste comme dans l'Exemple precedent. 50. Fig.

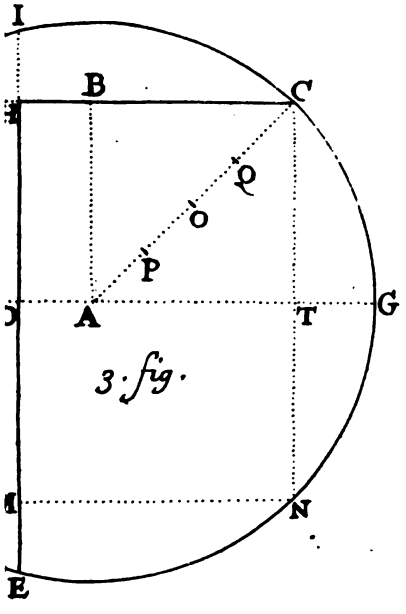
FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

om. p. 8.

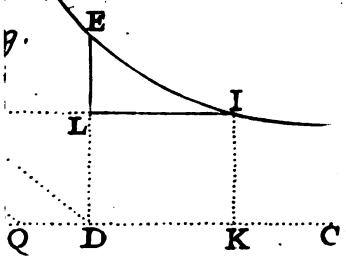


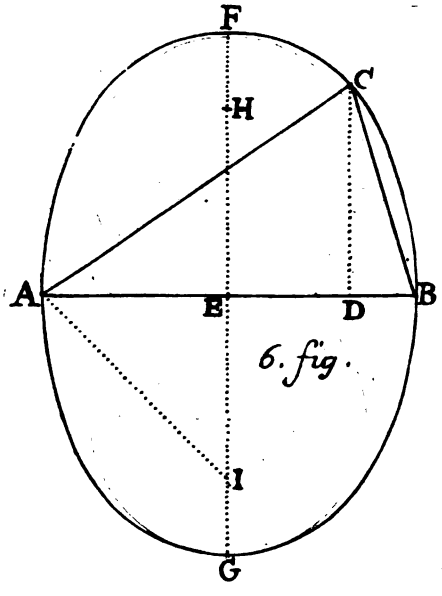


Digitized by Google

Digitized by Google

Li. Geom. p. 18





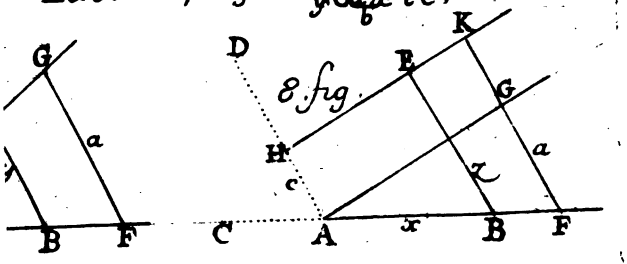
6. fig.

Digitized by Google

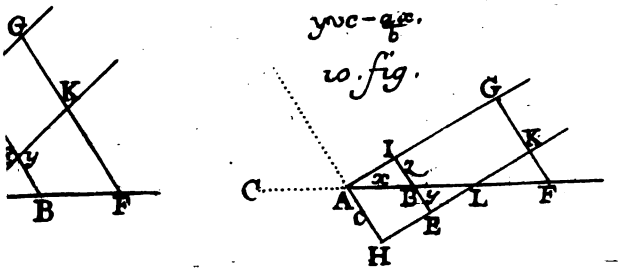
Digitized by Google

Li. Geom. p. 23.

$y \backsim \frac{a}{b}x + c.$

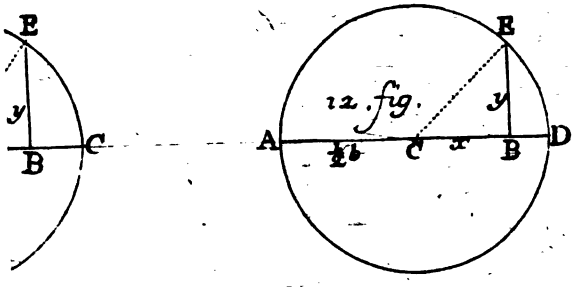


$y \backsim c - \frac{a}{b}x.$



$x.$

$yy \backsim bx - xx.$

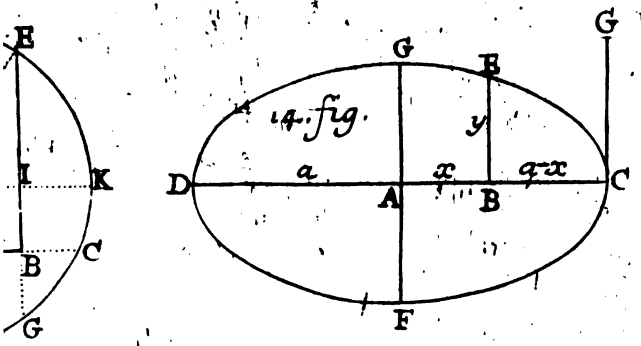


Digitized by Google

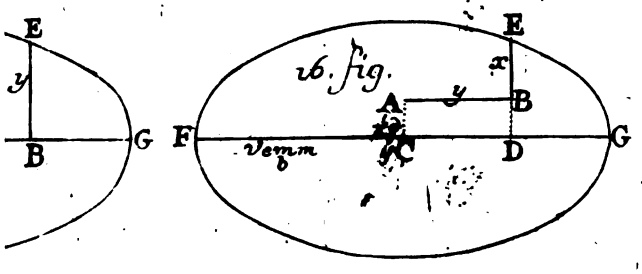
Digitized by Google

Li. Geom. p. 28.

x $xx \propto aa - \frac{byy}{c}$



yy $xx + ax \propto aa - \frac{byy}{c}$

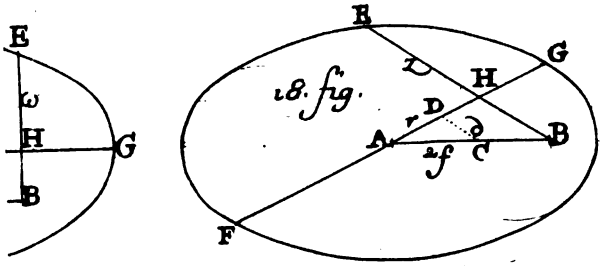


Digitized by Google

Digitized by Google

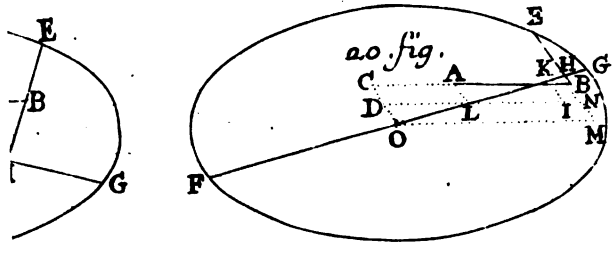
Li. Geom. p. 32.

$$yy - \frac{\partial x y}{f} \backsim aa - \frac{bxx}{c}$$



$\frac{xx}{c}$

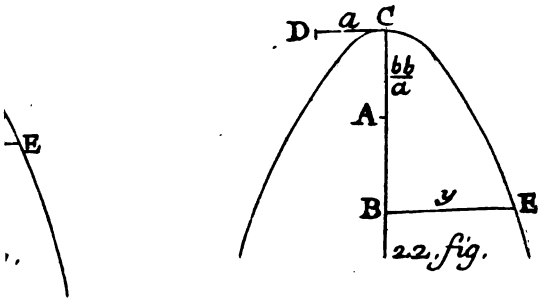
$$yy + gy - \frac{\partial xy}{f} \backsim aa - \frac{bxx}{c}$$



Digitized by Google

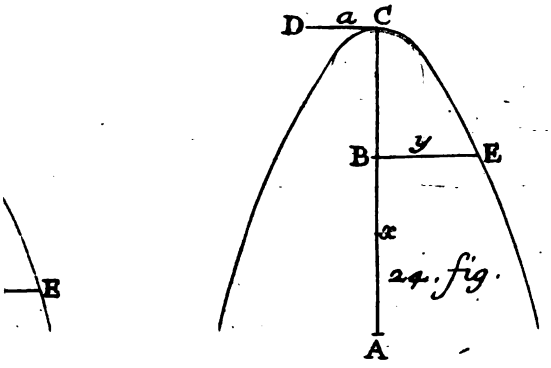
Digitized by Google

Li. Geom. p. 38. $yy \backsim ax \pm bb$.



22. fig.

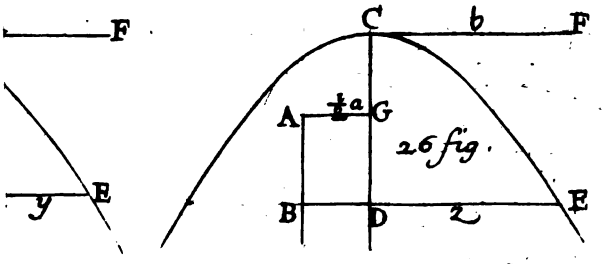
$yy \backsim bb \mp ax$.



24. fig.

a.

$yy - ay \backsim bx \pm cc$.

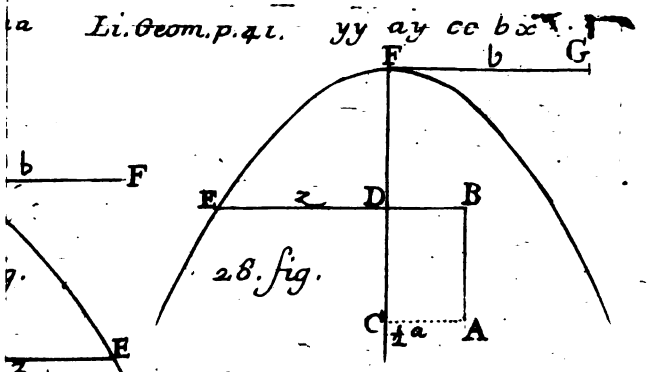


26 fig.

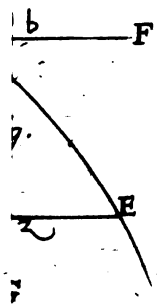
Digitized by Google

Digitized by Google

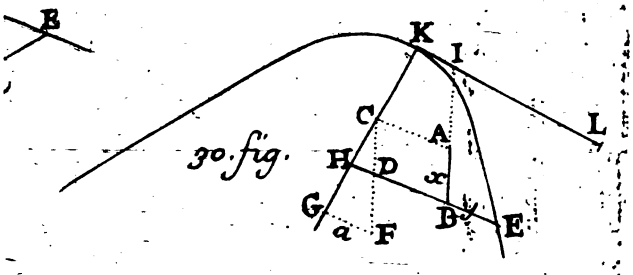
$yy \quad ay \quad cc \quad bx$



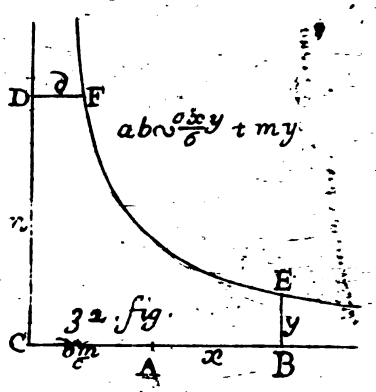
28. fig.



$yy + \frac{axy}{b} + \partial y \backsim cc - \frac{aaxx}{4bb}$



30. fig.

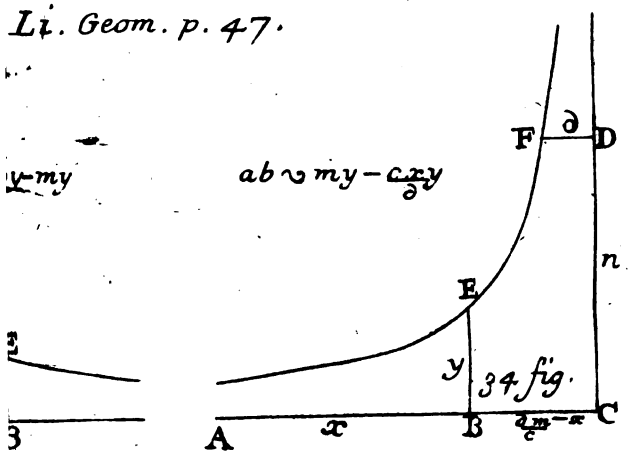


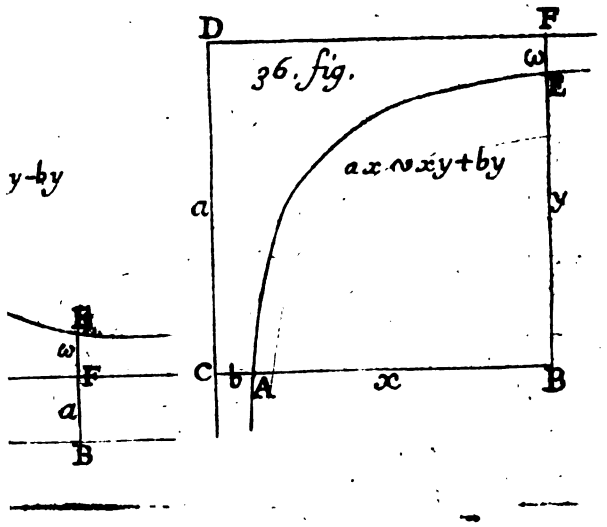
$ab \backsim \frac{oxy}{6} + my$

32. fig.

Digitized by Google

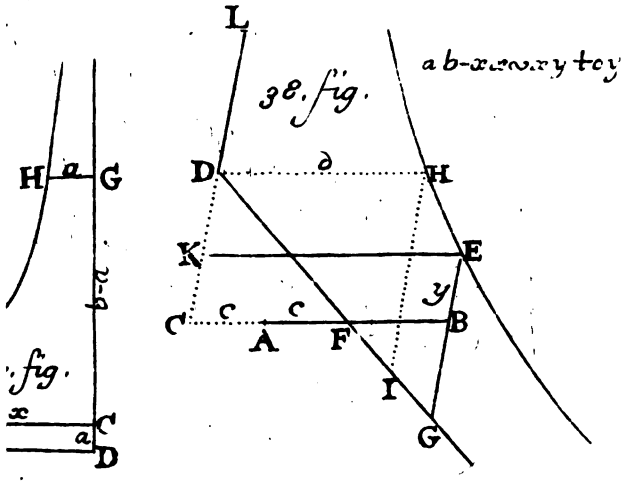
Li. Geom. p. 47.

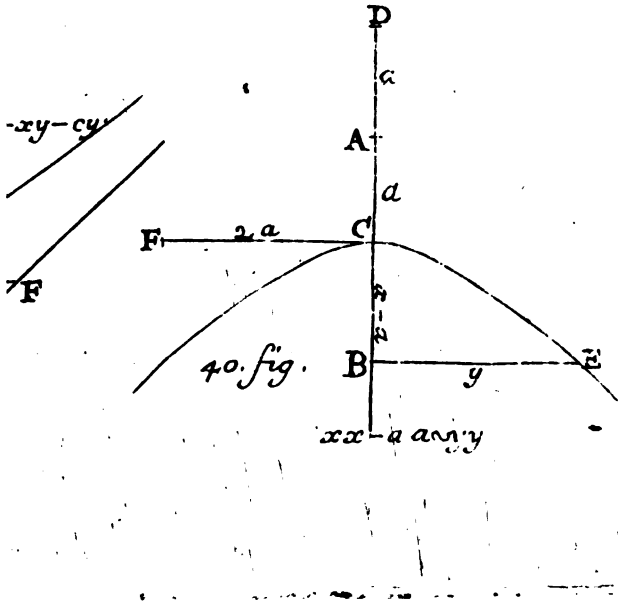




Digitized by Google

Digitized by Google



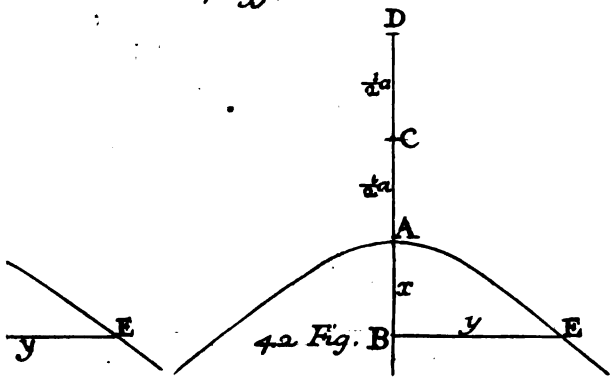


Digitized by Google

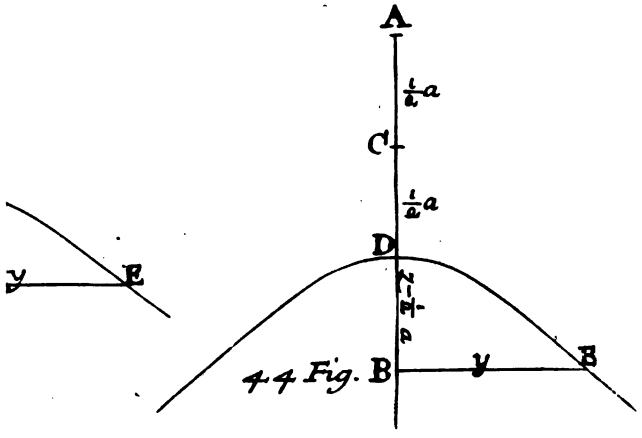
Digitized by Google

$xx+ax\sim yy$.

Li. Geom. p. 53.



$xx-ax\sim \frac{byy}{c}$.

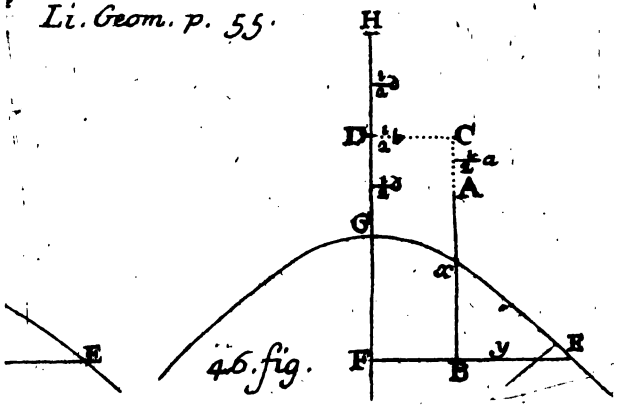


Digitized by Google

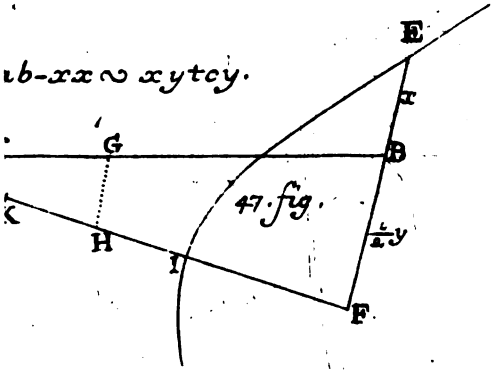
Digitized by Google

y. $xxtax\sim yytby$.

Li. Geom. p. 55.



46. fig.



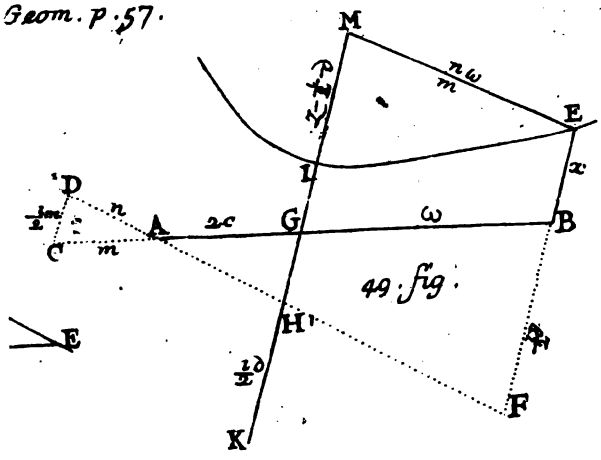
47. fig.

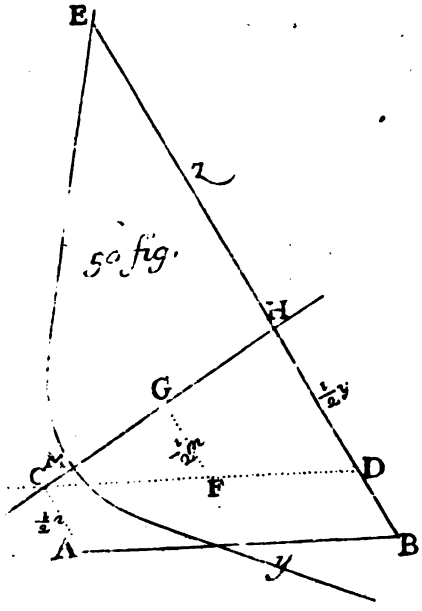
$ıb-xx\sim xytcy$.

Digitized by Google

$ab - xx \sim xy + cy$

Geom. p. 57.

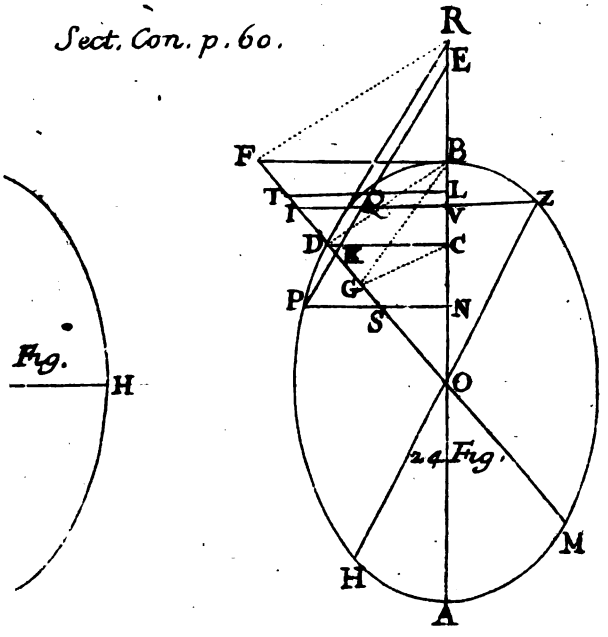


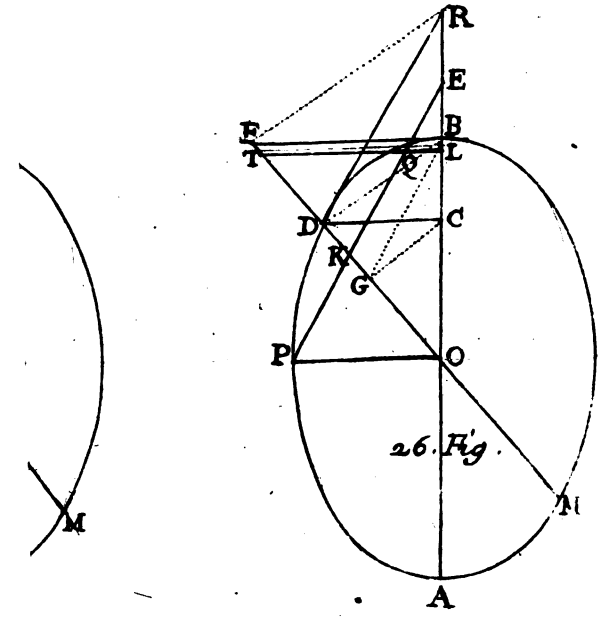


Digitized by Google

Digitized by Google

Sect. Con. p. 60.





Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google